МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
"Харьковский авиационный институт"

М.Ф. Бабаков, А.В. Попов, М.И. Луханин

ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРОННЫХ АППАРАТОВ

Учебное пособие по лабораторному практикуму

Харьков «ХАИ» 2004

УДК 621.396.6

Основы проектирования и надежности электронных аппаратов / М.Ф. Бабаков, А.В. Попов, М.И. Луханин. – Учеб. пособие по лабораторному практикуму. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2004. – 72 с.

Описаны лабораторные работы по курсам "Основы проектирования электронных аппаратов" и "Теоретические основы конструирования, технологии и надежности электронных средств", которые входят в программу подготовки бакалавров по направлению "Электронные аппараты". В текстах описаний изложены необходимые теоретические сведения, постановка задач, методика выполнения работ, приведены необходимые справочные данные.

Лабораторные работы ориентированы на использование программы математических расчетов и моделирования MathCAD.

Для студентов факультета радиотехнических систем летательных аппаратов.

Ил. 8. Табл. 10. Библиогр.: 9 назв.

Рецензенты: канд. техн. наук В.И. Луценко,
канд. техн. наук С.И. Хоменко

© Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "Харьковский авиационный институт", 2004

Лабораторная работа № 1

ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ И ВОЗДЕЙСТВИЙ

Цель работы:

– изучить методику цифрового моделирования детерминированных воздействий и их спектрального анализа;

– получить навыки использования системы MathCAD для моделирования и представления сигналов и воздействий.

Необходимые теоретические сведения

Одним из важнейших инструментов автоматизированного проектирования является моделирование на ЭВМ проектируемых объектов, представляемых в виде математических моделей. Математическая модель – система математических конструкций (чисел, переменных, матриц, множеств и т.д.) и отношений между ними, которые адекватно отражают существенные с инженерных позиций свойства моделируемого объекта или явления.

Среди свойств объекта, отражаемых в математической модели, различают свойства системы, элементов системы и внешней среды функционирования. Величины, характеризующие количественные свойства системы, элементов системы и внешней среды, называют соответственно выходными, внутренними и внешними параметрами. Очевидно, что свойства объекта зависят от внутренних и внешних параметров. Входные параметры разбивают на две группы: варьируемые, т.е. технические параметры проектируемой системы, и независимые (аргументы), к которым можно отнести входные воздействия и сигналы электронной аппаратуры.

Все наблюдаемые процессы, протекающие в технических системах, можно разделить на детерминированные и случайные. К детерминированным относят процессы, которые могут быть заданы либо математическими соотношениями, либо таблично. Процессы, описывающие детерминированные явления, могут быть периодическими (гармоническими, полигармоническими) и непериодическими (почти периодическими, переходными) (см. [9], с. 15 – 23).

При моделировании непрерывных процессов на ЭВМ непрерывную функцию времени $x(t)$ представляют массивом ее дискретных отсчетов x_i, взятых через равные промежутки времени Δt. Интервал времени Δt определяет (по теореме Котельникова) граничную частоту спектра сигнала, однозначно восстановимого по его отсчетам:

$$F_{\max} = 1/(2\Delta t). \qquad (1.1)$$

Частота дискретизации при этом

$$f_D = 2F_{\max}. \qquad (1.2)$$

Количество отсчетов N (объем выборки) связано с необходимым временем наблюдения T за процессом ([8], с. 34):

$$N = T/\Delta t. \qquad (1.3)$$

Для анализа спектрального состава процессов используют, как правило, процедуру быстрого преобразования Фурье (БПФ) ([8], с. 35; [9], с. 31 – 32). Особенностью процедуры БПФ является требование к объему выборки $N = 2^M$, где M – целое число, что в случае таблично заданных функций приводит к необходимости их интерполяции. Одним из методов получения значений таблично заданной функции в промежуточных точках является метод Лагранжа, позволяющий по известным значениям функции f_i в точках $x_i \in [a,b]$, $i = 1,\ldots,N$ определить значение функции $f(x^*)$ в точке $x^* \in [a,b]$ по формуле

$$f(x^*) = \sum_{j=1}^{N} \left[f_i \cdot \frac{\prod\limits_{i \neq j=1}^{N} (x^* - x_i)}{\prod\limits_{i \neq j=1}^{N} (x_j - x_i)} \right]. \qquad (1.4)$$

Порядок выполнения работы

1. Для времени наблюдения T =1 с определить частоту дискретизации f_D (1.2) при объеме выборки 256 отсчетов, сформировать массив отсчетов времени и детерминированное воздействие вида $x(t) = X\sin(2\pi \cdot f \cdot t + \theta)$ (гармонический сигнал) с амплитудой X = 2, частотой f = 25 Гц и начальной фазой $\theta = \pi/3$ рад. Построить графики детерминированного воздействия $x(t)$ и его комплексного спектра: $|\dot{S}(f)|$, $\mathrm{Re}(\dot{S})$ и $\mathrm{Im}(\dot{S})$. Для нахождения массива спектральных компонент использовать встроенную функцию $\mathrm{fft}(\bullet)$, выполняющую прямое БПФ для вектора отсчетов временной функции $x(t)$.

2. Построить график полигармонического воздействия вида $x(t) = X_1\sin(\omega_1 \cdot t + \theta_1) + X_2\sin(\omega_2 \cdot t + \theta_2) + X_3\sin(\omega_3 \cdot t + \theta_3)$ с амплитудами 2, 3, 1; частотами 25, 30, 50 Гц и начальными фазами 0, $\pi/6$, π рад, а также графики его спектральной функции (реальной, мнимой частей и модуля).

3. Сформировать непериодическое воздействие в виде прямоугольного импульса длительностью τ = 0,2 с и единичной амплитудой. Построить графики детерминированного воздействия и его спектра.

4. Сформировать табличное воздействие при N = 10 в виде одного периода синусоиды (параметрами сигнала задаться самостоятельно). Построить график таблично заданной функции. Применив интерполяционную формулу Лагранжа (1.4), получить N = 256 отсчетов сигнала. Построить графики сигнала (по массиву рассчитанных значений функции в промежуточных точках) и спектра.

5. Оформить отчет о лабораторной работе, который должен содержать графики моделируемых воздействий и их спектров.

Контрольные вопросы

1. Как рассчитать требующуюся частоту дискретизации и как определить необходимое время моделирования процесса?
2. В чем разница методик моделирования периодических и переходных процессов?
3. Что такое интерполяция функций и как она выполняется?

Пример программы интерполяции таблично заданной функции

$$N := 10 \qquad i := 0..N \qquad x_i := \frac{i}{N} \qquad f_i := \exp(-5 \cdot x_i) \qquad j := 0..N$$

Интерполяционная формула Лагранжа

$$F(p,k) := \prod_i \mathrm{if}[i = k, 1, (p - x_i)]$$

$$S(d) := \sum_j f_j \frac{F(d,j)}{F(x_j, j)}$$

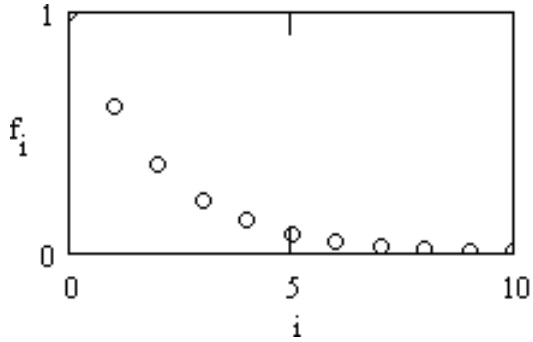


Рис.1.1. График таблично заданной функции

Расчет промежуточных точек функции

$$M := 100 \qquad k := 0..M$$

$$xx_k := \frac{k}{M} \qquad fi_k := S(xx_k)$$

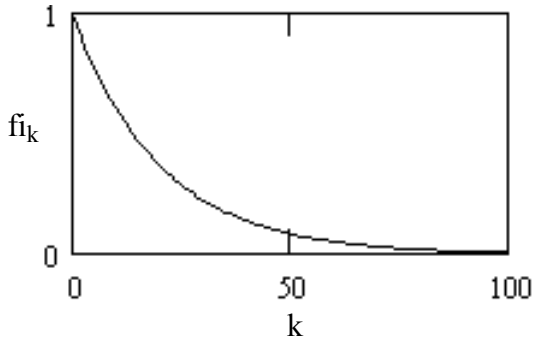


Рис. 1.2. Результаты расчета

Лабораторная работа № 2

МЕТОДЫ ЦИФРОВОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗНАЧЕНИЙ СИГНАЛОВ, ВОЗДЕЙСТВИЙ И ПАРАМЕТРОВ

Цель работы:

- изучить методы цифрового статистического моделирования;
- получить практические навыки реализации алгоритмов цифрового статистического моделирования;
- закрепить знания о методах обработки статистических данных.

Необходимые теоретические сведения

При разработке и проектировании электронных средств различного назначения и технологических процессов их производства приходится учитывать случайный характер параметров комплектующих электрорадиоэлементов (ЭРЭ), конструктивных размеров, входных сигналов, внешних воздействий и т.п. Определяющие показатели объекта исследования при этом представляют в виде

$$y_i = \phi_i(x_1,...,x_{ni}), \tag{2.1}$$

где y_i – определяющий показатель, x_i – случайные и детерминированные первичные параметры (параметры ЭРЭ, размеры, параметры входных сигналов и внешних воздействий и т.п.), ϕ_i – функция взаимосвязи выходного параметра с первичными.

Из (2.1) следует, что выходные параметры y_i также случайны и в общем случае статистически зависимы (как параметры, зависящие от одних и тех же случайных переменных). Нахождение их характеристик чисто аналитическим путем по известным законам распределения первичных параметров является крайне сложной задачей, решение которой можно упростить за счет статистического имитационного эксперимента. При этом машинным путем имитируются реализации x_{ik} случайных первичных параметров x_i, по ним вычисляют в соответствии с соотношениями (2.1) реализации y_{ik} выходных параметров y_i. Статистическая обработка полученных массивов $\{y_{ik}\}$ позволяет определить требуемые статистические характеристики.

Основная трудность при статистическом моделировании состоит в формировании реализаций случайных значений первичных параметров с заданными законами распределения. Большинство алгоритмов моделирования реализаций случайных величин основано на функциональном преобразовании реализаций случайной величины r,

равномерно распределенной в интервале [0, 1]. Такую величину называют стандартной. Для получения ее реализаций можно применить мультипликативный алгоритм (см. [8], с. 40 – 42). В различных системах программирования имеются встроенные процедуры (программы) генерации реализаций таких чисел. В системе MathCAD такой подпрограммой является $\mathrm{rnd}(\bullet)$.

Для имитации реализаций непрерывных случайных величин применяют метод обратной функции ([8], с. 48 – 52), позволяющий получить из реализаций r_i стандартной случайной величины реализации y_i случайной величины с требуемым законом распределения:

$$y = F^{-1}(r), \tag{2.2}$$

где F^{-1} – функция, обратная интегральной функции распределения.

Так, для равномерного в интервале $[a, b]$ распределения случайной величины алгоритм формирования реализаций

$$y_i = (b - a) \cdot r_i + a, \tag{2.3}$$

а для экспоненциального распределения $f(y) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot y}$

$$y_i = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(r_i). \tag{2.4}$$

Если для закона распределения не существует в явном виде обратная функция F^{-1}, то применяются другие методы формирования реализаций, основанные на частных свойствах распределения. Одним из них при нормальном распределении есть свойство нормализации суммы достаточно большого числа ($n \geq 10$) произвольно распределенных слагаемых ("центральная предельная теорема"). С учетом этого свойства реализации y_i случайной величины с нормальным распределением $N(m, \sigma)$ можно сформировать из реализаций r_i стандартной случайной величины по алгоритму

$$y_i = m + \sigma \cdot \sqrt{\frac{12}{n}} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{n} r_j - \frac{n}{2} \right\}. \tag{2.5}$$

Алгоритм формирования реализаций дискретных случайных величин ([8], с. 44) строится по принципу обратной функции:

$$\text{если } r_i < \sum_{j=1}^{k} P_j \text{, то } y_i = x_k,$$

где x_k – множество дискретных значений случайной величины с заданными вероятностями P_k, причем $\sum_{k=1}^{n} P_k = 1$.

Алгоритм формирования реализаций векторного случайного параметра $\vec{y}_i$ с заданным вектором математических ожиданий $\vec{m}_y$ и корреляционной матрицей $\mathbf{K}_y$ содержит следующие операции:

1. Формирование n независимых компонентов ξ_k с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями по алгоритму (2.5). В результате получается вектор $\vec{\xi}$ с корреляционной матрицей $\mathbf{K}_\xi = \mathbf{I}$ (единичная матрица).

2. Нахождение такого линейного матричного преобразования $\mathbf{A}$, которое трансформирует вектор $\vec{\xi}$ в вектор с заданной корреляционной матрицей $\mathbf{K}_y$

$$\vec{y} = \mathbf{A} \cdot \vec{\xi}\,. \tag{2.6}$$

Преобразование $\mathbf{A}$ определяется собственными числами $[\lambda_i]$ и собственными векторами $\lfloor \phi_{ij} \rfloor$ корреляционной матрицы $\mathbf{K}_y$:

$$\mathbf{A} = [\phi] \cdot [\lambda]^{1/2}, \tag{2.7}$$

где

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \dots & \phi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \phi_{n1} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

3. Выполнение перемножения матриц:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \phi_{n1} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

4. Приведение полученного по (2.9) коррелированного случайного вектора $\vec{y}$ с нулевым математическим ожиданием к случайному вектору с требуемым математическим ожиданием $\vec{m}_y$:

$$\vec{y} = \vec{y} + \vec{m}_y\,. \tag{2.10}$$

Статистическая обработка данных имитационного эксперимента

Для статистической обработки данных имитационного эксперимента применяют типовые алгоритмы статистического анализа наблюдений, основными из которых являются следующие:

1. Выборочное среднее значение

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i \,, \tag{2.11}$$

где N – число отсчетов, x_i – значения отсчетов.

2. Выборочное среднеквадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \,. \tag{2.12}$$

3. Гистограмма плотности распределения.

При объеме выборки N плотность распределения $f(x)$ можно оценить как $\hat{f}(x) = \frac{N_x}{N \cdot \Delta x}$, где Δx – узкий интервал, симметричный относительно точки x; N_x – количество попаданий в интервал Δx.

При равномерном шаге Δx одним из наиболее быстрых является адресный алгоритм построения гистограммы, состоящий из следующих этапов:

– для заданной выборки x_i, где $i = 1,...,N$, находят минимальное ($\min$) и максимальное ($\max$) значения;

– определяют шаг Δx для заданного количества разбиений M гистограммы: $\Delta x = (\max - \min)/M$;

– для каждого значения x_i определяют его положение в гистограмме G: $k = (x_i - \min)/\Delta x$ (k находится в интервале $[0, M]$);

– выполняют накопление гистограммы $G_k = G_k + 1$; массив гистограммы G должен быть предварительно обнулен;

– оценивают плотность распределения

$$\hat{f}_k = \frac{G_k}{N \cdot \Delta x}, \quad k = 0,...,M \,.$$

4. Поскольку функция распределения $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$, то ее можно оценить по результатам оценки плотности распределения:

$$F_k = \sum_{i=0}^{k} \hat{f}_i \,, \quad k = 0,...,M \,.$$

5. Для проверки согласия теоретического и экспериментального распределений по критерию χ^2 необходимо вычислить гистограмму экспериментальной выборки $G(x)$ и найти теоретические значения вероятностей попадания в интервалы гистограммы

$$P_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(z)dz, \qquad (2.13)$$

где M – количество интервалов в гистограмме.

Отклонение χ^2 может быть определено по формуле

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{M} \frac{(N \cdot P_k - G_k)^2}{N \cdot P_k}. \qquad (2.14)$$

Вывод о непротиворечии эмпирического распределения (гистограммы) заданному теоретическому распределению делают на основе сравнения рассчитанного значения χ^2 с квантилем этого распределения $\chi^2_{\text{табл}}(\tau, P)$, приведенным в табл. 2.1. Квантиль распределения определяется заданной вероятностью P принятия правильного решения и числом степеней свободы τ, которое равно количеству разрядов гистограммы за вычетом количества независимых условий, наложенных на экспериментальные вероятности $f_k(x)$:

1) $\sum f_k = 1$ (это условие налагают всегда);

2) $\sum x_k \cdot f_k = m_x$ (требование соответствия среднему значению);

3) $\sum x_k^2 \cdot f_k = \sigma_x^2$ (требование соответствия дисперсии).

Если $\chi^2 < \chi^2_{\text{табл}}$, то теоретическое и эмпирическое распределения с вероятностью P не противоречат друг другу.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Задать исходные данные для моделирования:
– объем реализаций $N := 200$;
– количество разбиений в гистограмме $M := 10$.

2. Определить переменные циклов моделирования: $i := 1..N$, $j := 0..M$, $k := 0..M - 1$.

3. Построить генератор стандартной случайной величины по мультипликативному алгоритму:

$$r_i = r_{i-1} \cdot 37 - \text{int}(r_{i-1} \cdot 37),$$

где r_0 – стартовое случайное число, нечетное, принадлежащее интервалу [0, 1], не кратное 5 (например, r_0= 0,376783).

Построить график реализаций r_i.

4. Рассчитать точки разбиения гистограммы $w_j = j/M$.

5. Использовав процедуру MathCAD $\text{hist}(w, r)$, построить гисто-

грамму G выборки r.

6. Использовав встроенную подпрограмму $\mathrm{rnd}(1)$, получить массив x стандартной случайной величины, построить график ее реализаций и гистограмму выборки.

7. По критерию χ^2 (2.14) и табл. 2.1 оценить соответствие распределения сгенерированных значений r и x равномерному закону. Сравнить точность формирования случайных чисел с равномерным законом распределения по мультипликативному алгоритму и с использованием стандартной процедуры.

8. Для равновероятного закона распределения задать границы a и b плотности распределения $f(z) = 1/(b-a)$.

9. Определить границы интервалов гистограммы $w_j = a + j \cdot \dfrac{b-a}{M}$.

10. Построить график плотности вероятности (в точках w_k).

11. Построить график функции закона распределения.

12. С помощью алгоритма (2.3) $y_i = (b-a) \cdot r_i + a$ сгенерировать выборку объемом 200 чисел, распределенных по равновероятному закону, заполнить массив X. Построить график реализаций X_i.

13. Найти оценки среднего значения (2.11) и среднеквадратического отклонения (2.12).

14. Построить гистограмму G выборки X.

15. Оценить вероятности попадания в интервалы гистограммы.

16. По критерию χ^2 (2.14) и табл. 2.1 оценить степень соответствия теоретического и экспериментального законов распределения.

17. Выполнить пп. 9 – 16 для случая экспоненциального закона. Можно принять параметр $\lambda = 1$. Для разбиения гистограммы использовать нижнее значение $a = 0$, верхнее значение $b = 6/\lambda$. Генерацию случайных чисел с экспоненциальным законом распределения осуществить методом обратной функции по алгоритму $y_i = -\dfrac{1}{\lambda} \cdot \ln(r_i)$.

18. Выполнить для случая нормального закона распределения пп. 9 – 16. Параметры распределения принять: $m = 1$, $\sigma = 2$. Для разбиения гистограммы использовать нижнее значение $a = m - 3 \cdot \sigma$, верхнее значение $b = m + 3 \cdot \sigma$. Генерацию случайных чисел с нормальным законом распределения осуществить методом центральной предельной теоремы при n = 24:

$$y_i = m + \sigma \cdot \sqrt{\frac{12}{n}} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{n} r_j - \frac{n}{2} \right\}.$$

19. Для заданного варианта распределения дискретной случайной величины x построить алгоритм имитации ее реализаций:

$$\text{если } r_i < \sum_{j=1}^{k} P_j \text{, то } y_i = x_k .$$

20. Выполнить генерацию 200 реализаций и оценить вероятности появления отдельных дискретных значений. Сравнить их с заданными вероятностями.

21. По заданным параметрам распределения двумерного нормального вектора разработать алгоритм имитации его реализаций:

$$\vec{y} = \vec{m}_y + \mathbf{A} \cdot \vec{\xi} ,$$

где $\mathbf{A}$ – матрица линейного преобразования некоррелированного вектора случайных величин $\vec{\xi}$ с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией в векторную случайную величину с нулевым математическим ожиданием и заданной корреляционной матрицей $\mathbf{K}_y = \lfloor K_{ij} \rfloor$ (2.7). Для нахождения собственных чисел λ_i и собственных векторов $\lfloor \phi_{ij} \rfloor$ матрицы $\mathbf{K}_y$ использовать встроенные матричные функции $\mathrm{eigenvals}(\bullet)$ и $\mathrm{eigenvecs}(\bullet)$.

22. Сформировать 200 реализаций двумерного вектора и, применив встроенные статистические функции $\mathrm{mean}(\bullet)$ и $\mathrm{stdev}(\bullet)$, получить статистические оценки средних значений и среднеквадратических отклонений компонентов вектора.

23. Получить оценку корреляционного момента

$$\hat{K}_{12} = \hat{K}_{21} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} [y_1(i) - \hat{m}y_1] \cdot [y_2(i) - \hat{m}y_2],$$

где $\hat{m}y_1$, $\hat{m}y_2$ – оценки средних компонентов двумерного вектора.

24. Результаты, полученные в пп. 22 и 23, сравнить с заданными параметрами двумерного вектора.

Пример выполнения статистического анализа характеристик генератора случайных чисел приведен в прил. 3.

Содержание отчета

Отчет о лабораторной работе должен содержать:

– результаты моделирования и анализа для случаев равномерного, экспоненциального и нормального распределений;

– алгоритм имитации, реализации дискретной случайной величины и результаты оценки вероятностей ее появления;

– алгоритм моделирования реализаций многомерного нормального вектора и статистической обработки данных моделирования.

Таблица 2.1

Значения квантилей χ^2 распределения

Число степеней свободы τ	Значения χ^2 для вероятности P							
	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05
1	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71	3,84
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99
3	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82
4	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49
5	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07
6	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59
7	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07
8	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51
9	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92
10	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31
11	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68
12	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55	21,0
13	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4
14	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7
15	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,3	25,0

Контрольные вопросы

1. Как получить алгоритм формирования случайных реализаций для равномерного и экспоненциального распределений (2.3), (2.4)?
2. Почему метод обратной функции неприемлем для формирования реализаций нормально распределенной случайной величины?
3. В чем состоит алгоритм имитации реализаций дискретной случайной величины?
4. Как статистически оценить вероятность появления отдельных значений дискретной случайной величины?
5. На каком свойстве основана имитация многомерного случайного вектора с заданной корреляционной матрицей?
6. В чем состоит суть проверки гипотезы о согласии эмпирического и теоретического распределений?

Лабораторная работа № 3

ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Цель работы:

– изучить методику построения алгоритма цифрового моделирования линейного динамического объекта;

– получить навыки компьютерной реализации в системе MathCAD моделирования преобразования временных процессов динамическими объектами.

Необходимые теоретические сведения

Электронная аппаратура, ее конструкция и элементы, технологические процессы изготовления в большинстве случаев являются динамическими системами, которые могут быть описаны нелинейными нестационарными дифференциальными уравнениями вида:

$$F\left\{y^{(n)}, y^{(n-1)}, ..., y^{(1)}, y, x^{(m)}, x^{(1)}, x, t\right\} = 0, \qquad (3.1)$$

где $y(t)$, $x(t)$ – соответственно выходная реакция и входное воздействие на объект.

В соответствии с теоремой Котельникова временные функции $y(t)$, $x(t)$ можно заменить их дискретными отсчетами $y(t_i)$, $x(t_i)$. Сущностью цифрового моделирования объектов является установление взаимосвязи между $y(t_i)$ и $x(t_i)$, т.е. $y(t_i) = A\{x(t_i)\}$, и воспроизведение этой связи на ЭВМ. В большинстве случаев удается осуществить декомпозицию объекта и представить его в виде структурной схемы. Тогда цифровое моделирование сводится к последовательному моделированию преобразования сигнала по структурной схеме, что не вызывает принципиальных трудностей, если известны алгоритмы моделирования отдельных блоков. Наиболее сложным при этом является цифровое моделирование линейных динамических объектов, описываемых либо дифференциальным уравнением

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^{(j)}(t), \qquad (3.2)$$

либо эквивалентными ему передаточной функцией

$$W(p) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j p^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i} = \frac{Y(p)}{X(p)} \qquad (3.3)$$

или импульсной характеристикой (реакцией объекта на воздействие δ-функции), определяемой как обратное преобразование Лапласа передаточной функции

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\}. \tag{3.4}$$

С использованием этих характеристик могут быть получены два основных алгоритма цифрового моделирования: прямой, основанный на уравнении свертки, связывающем входной и выходной сигналы с импульсной переходной характеристикой ([8], с. 63 – 65)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \cdot x(t-\tau) d\tau, \tag{3.5}$$

и рекуррентный ([8], с. 68 – 75), который может быть составлен по дифференциальному уравнению объекта с применением конечных разностей или же по передаточной функции объекта с применением метода z-преобразования. Разновидностью прямого алгоритма является фильтровой (спектральный) метод ([8], с. 65 – 68), который состоит в применении к выражению (3.3) преобразования Фурье (БПФ):

$$F\{y(t)\} = F\{w(t)\} \cdot F\{x(t)\}. \tag{3.6}$$

Порядок выполнения работы

1. Для выданного варианта объекта моделирования (см. прил. 1) привести передаточную функцию к типовому виду (3.3), рассчитав соответствующие коэффициенты по значениям параметров модели.
2. Построить прямой алгоритм моделирования, для чего нужно:
- разложить передаточную функцию на слагаемые вида

$$\frac{A}{p^n}, \frac{B}{p+\alpha}, \frac{C}{(p+\alpha)^2}, \frac{D \cdot \beta}{p^2+\beta^2},$$

$$\frac{E \cdot p}{p^2+\beta^2}, \frac{F \cdot \beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}, \frac{G \cdot (p+\alpha)}{(p+\alpha)^2+\beta^2};$$

- по табл. 3.1 найти их изображения и определить $w(t)$;
- записать алгоритм в виде

$$y(i) = \Delta t \cdot \sum_{j=0}^{N-1} w(j) \cdot x(i-j).$$

3. Построить фильтровой алгоритм цифрового моделирования:
- проверить условие $\lim\limits_{t \to \infty} w(t=0)$;
- сформировать массив значений частотной характеристики

$$W(k) = W(j \cdot k \cdot \Delta\omega);$$

– записать алгоритм моделирования:

$$X(k) = \text{БПФ}\{x(i)\};$$

$$y(i) = \text{ОБПФ}\{W(k) \cdot X(k)\}.$$

4. Построить рекуррентный алгоритм, для чего необходимо:

– в передаточной функции числитель и знаменатель разделить на p в старшей степени, т.е. на p^n;

– оператор $\frac{1}{p^k}$ заменить z-преобразованием из табл. 3.2;

– выполнив деление числителя и знаменателя $W(z)$ на z в старшей степени, т.е. на z^n, перейти к форме передаточной функции с отрицательными степенями z:

$$W(z) = \frac{C_m z^{-(n-m)} + C_{m-1} z^{-(n-(m-1))} + ... + C_0 z^{-n}}{1 + D_{n-1} z^{-1} + ... + D_0 z^{-n}};$$

– записать рекуррентную часть алгоритма и определить $y(i)$:

$$y(i) = C_m x(i-(n-m)) + C_{m-1} x(i-n+m-1) + ... C_0 x(i-n) -$$
$$- D_{n-m} y(i-1) - ... - D_0 y(i-n).$$

Для устранения отрицательных индексов в переменных $x(\ )$, $y(\ )$ при переходе на рекуррентный режим вычислений определить

$$y(0) = 0,$$
$$y(1) = C_m x(0),$$
$$y(2) = C_m x(1) - C_{m-1} x(0) - D_{n-1} y(1).$$

5. Загрузить программу MathCAD, ввести исходные данные:

– параметры электрической модели объекта (R, L, C);

– диапазон частот для анализа F;

– количество временных отсчетов N;

– количество отсчетов по частоте $M = N/2$;

– шаг дискретизации по времени $dT = \frac{1}{2 \cdot F}$ и частоте $dF = \frac{F}{M}$.

Рассчитать параметры модели.

6. Ввести параметры циклов моделирования:

– $i := 0..N-1$ – по времени;

– $k := 0..M$ – по частоте.

7. Ввести выражение импульсной переходной характеристики и построить ее график. Проверить условие ее сходимости.

8. Сформировать входное воздействие в массиве x_i и построить его график.

9. Составить программу расчета выходной реакции $y(t)$ объекта по прямому методу. Построить совмещенный график функций $x(t)$, $y(t)$.

10. Составить программу расчета выходной реакции $y(t)$ объекта по фильтровому методу, для чего необходимо:

– получить спектр входного воздействия методом БПФ, используя функцию $\mathrm{fft}(x)$;

– рассчитать массив комплексных частот $p_k = j \cdot 2\pi \cdot dF \cdot k$;

– определить частотную характеристику $W(j\omega)$ в массиве W_k;

– получить спектр выходной реакции объекта в массиве G_k;

– найти выходную реакцию $y(t)$ объекта как обратное преобразование Фурье от спектра (функция $\mathrm{ifft}(G)$) в массиве y_i.

Построить совмещенный график функций $x(t)$ и $y(t)$.

11. Задать начальные условия ($y_0 = 0$ и т.д.) и реализовать рекуррентный алгоритм формирования выходной реакции объекта y_i.

12. Сравнить результаты моделирования, полученные различными методами.

Содержание отчета

Отчет о лабораторной работе должен содержать:

– передаточную функцию объекта в типовом виде;

– разложение передаточной функции на типовые слагаемые;

– выражение для импульсной переходной характеристики $w(t)$;

– прямой алгоритм цифрового моделирования;

– результат проверки сходимости $w(t)$;

– фильтровой алгоритм в виде структурной схемы;

– результат преобразования $W(p)$ в $W(z)$;

– представление $W(z)$ по отрицательным степеням z;

– рекуррентный алгоритм моделирования и начальные условия;

– результаты моделирования динамической системы прямым, фильтровым и рекуррентным методами (графики);

– выводы по результатам лабораторной работы.

Пример применения рассматриваемых методов моделирования приведен в прил. 2.

Таблица 3.1

Преобразования Лапласа некоторых функций

$F(t)$	$F(p)$
t	$\frac{1}{p^2}$
$\frac{1}{(n-1)!}\cdot t^{n-1}$	$\frac{1}{p^n}$
$e^{-\alpha\cdot t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$t\cdot e^{-\alpha\cdot t}$	$\frac{1}{\left(p+\alpha^2\right)}$
$\sin(\beta\cdot t)$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
$\cos(\beta\cdot t)$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$
$e^{-\alpha\cdot t}\cdot\sin(\beta\cdot t)$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{-\alpha\cdot t}\cdot\cos(\beta\cdot t)$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$

Таблица 3.2

Z-преобразования оператора $\frac{1}{p^k}$

$\frac{1}{p^k}$	$Z\left\{\frac{1}{p^k}\right\}$
$\frac{1}{p}$	$\frac{z\cdot\Delta t}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	$\frac{z\cdot\Delta t^2}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{p^3}$	$\frac{z\cdot(1+z)\cdot\Delta t^3}{2\cdot(z-1)^3}$
$\frac{1}{p^4}$	$\frac{z\cdot\left(z+4\cdot z+z^2\right)\cdot\Delta t^4}{6\cdot(z-1)^4}$
$\frac{1}{p^5}$	$\frac{z\cdot\left(1+11\cdot z+11\cdot z^2+z^3\right)\cdot\Delta t^5}{24\cdot(z-1)^5}$

Контрольные вопросы

1. В чем состоит разница между прямым и рекуррентным алгоритмами моделирования динамических систем?
2. В чем суть прямого цифрового метода моделирования?
3. В чем суть фильтрового метода моделирования?
4. В чем суть рекуррентного метода моделирования?
5. При каких условиях прямые методы моделирования неприменимы?

Лабораторная работа № 4

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ВНЕЗАПНОГО И ДЕГРАДАЦИОННОГО ОТКАЗОВ

Цель работы:

– изучить основные модели отказов, числовые характеристики безотказности и их статистические оценки;
– изучить методику и получить навыки моделирования отказов;
– получить навыки статистической обработки данных об отказах.

Необходимые теоретические сведения

Условия работоспособности (отказа) любого элемента можно представить в виде соотношений

$$\mathrm{Q} < \mathrm{R}, \tag{4.1}$$

$$x_{\text{д}} < x, \tag{4.2}$$

где Q – обобщенная прочность (тепловая, механическая, электрическая и т.п.); R – обобщенная нагрузка; x – значение определяющего параметра; $x_{\text{д}}$ – его допустимое значение. Соотношение (4.1) соответствует условию отказа по схеме "нагрузка – прочность"; а (4.2) – параметрическому условию отказа.

Параметры Q, R, x в выражениях (4.1), (4.2) могут быть случайными величинами или процессами. Их свойства определяют модели внезапных, постепенных и деградационных отказов.

Модель внезапного отказа

Отказ называется внезапным, если его невозможно предусмотреть предварительными исследованиями или техническим осмотром. Математически условие внезапного отказа, соответствующее условиям (4.1), (4.2), представляют в виде

$$x(t) > x_{\text{д}}, \tag{4.3}$$

где $x(t)$ – нормальный стационарный случайный процесс нагружения или изменения определяющего параметра, $x_{\text{д}}$ – постоянное допустимое значение прочности или определяющего параметра. При условии (4.3) моделью отказа является пересечение уровня $x_{\text{д}}$ первым выбросом процесса $x(t)$. Последовательность моментов пересечений образует поток случайных событий. Если уровень $x_{\text{д}}$ существенно

превышает математическое ожидание $\bar{x}$ процесса $x(t)$ так, что выбросы носят редкий характер, то поток называют простейшим. Он обладает следующими свойствами:

1) стационарностью – вероятность появления определенного числа γ событий в интервале $[t, t+\tau]$ зависит только от τ, а не от t;

2) ординарностью – вероятность возникновения на элементарном участке Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью возникновения одного события;

3) отсутствием последействия – для любых неперекрывающихся временных участков число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие.

Для простейшего потока событий вероятность появления ровно k событий за время t определяется законом Пуассона:

$$P_k(t) = \frac{(\bar{n}_x \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{\bar{n}_x \cdot t}, \tag{4.4}$$

где $\bar{n}_x$ – среднее число пересечений уровня $x_д$ в единицу времени.

Вероятность безотказной работы соответствует отсутствию пересечений за время t (k = 0), т.е.

$$P(t) = P_0(t) = e^{-\bar{n} \cdot t}. \tag{4.5}$$

При этом плотность распределения времени до отказа равна

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \tag{4.6}$$

а функция распределения

$$F(t) = 1 - P(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}. \tag{4.7}$$

Модель деградационного отказа

Множество физико-химических процессов, протекающих в элементах, приводит к деградации их свойств, что вызывает изменение определяющего параметра элемента x по случайному нестационарному закону $x(t)$, подчиняющемуся стохастическому дифференциальному уравнению

$$dx(t) = a \cdot dt + b \cdot dn(t), \tag{4.8}$$

где a – средняя скорость изменения параметра; b^2 – средняя скорость изменения дисперсии определяющего параметра; $n(t)$ – гауссовский случайный процесс.

Время до пересечения уровня $x_д$ процессом $x(t)$ (время до отказа) является случайной величиной, которая подчиняется закону распределения $f(t)$. В зависимости от характера процесса деградации

выделяют два вида закона распределения $f(t)$: диффузионное немонотонное (DN) и диффузионное монотонное (DM).

Для изделий электронной техники (ИЭТ) преобладающими механизмами отказов являются процессы старения и усталости, а также различные электрохимические процессы. При этом реализации процесса деградации носят немонотонный характер, поэтому закон распределения наработок до отказа имеет вид DN-распределения:

$$f(t) = \frac{1}{b \cdot t \cdot \sqrt{2\pi \cdot t}} \exp\left(-\frac{(1 - a \cdot t)^2}{2 \cdot b^2 \cdot t} \right). \qquad (4.9)$$

Для механических изделий, преобладающими механизмами отказов которых являются необратимые процессы изнашивания, усталости и коррозии, реализации процесса деградации носят монотонный характер (непрерывное накопление повреждений), поэтому закон распределения наработок до отказа имеет вид DM-распределения:

$$f(t) = \frac{1 + a \cdot t}{2 \cdot b \cdot t \cdot \sqrt{2\pi \cdot t}} \exp\left(-\frac{(1 - a \cdot t)^2}{2 \cdot b^2 \cdot t} \right). \qquad (4.10)$$

Деградационные отказы могут быть как внезапными, так и постепенными (параметрическими).

Показатели безотказности

С плотностью распределения $f(t)$ времени до отказа связаны следующие показатели безотказности:

1) вероятность безотказной работы за время t

$$P(t) = \int_t^{\infty} f(t)dt = 1 - \int_0^t f(t)dt; \qquad (4.11)$$

2) среднее время безотказной работы

$$T = \int_0^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_0^{\infty} P(t)dt; \qquad (4.12)$$

3) интенсивность отказов в момент времени t

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = -\frac{P'(t)}{P(t)}. \qquad (4.13)$$

Статистические оценки показателей безотказности

Если проведено наблюдение наработок до отказа n изделий, то по значениям t_i $(i = 1, ..., n)$ могут быть получены точечные статистические оценки показателей безотказности:

1) плотности распределения времени до отказа в момент t

$$f^*(t) = \frac{r(t, t+\Delta t)}{n \cdot \Delta t}; \qquad (4.14)$$

2) вероятности безотказной работы за время t

$$P^*(t) = 1 - \frac{r(t)}{n}; \qquad (4.15)$$

3) среднего времени работы до отказа

$$T^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i; \qquad (4.16)$$

4) интенсивности отказов в момент времени t

$$\lambda^*(t) = \frac{r(t, t+\Delta t)}{[n - r(t)] \cdot \Delta t}. \qquad (4.17)$$

В формулах (4.14) – (4.17) использованы следующие обозначения: $r(t, t+\Delta t)$ – число отказов, зафиксированных в небольшом интервале $[t, t+\Delta t]$ (количество наработок t_i, попавших в этот интервал); $r(t)$ – общее число отказов, зафиксированных до момента t.

Постановка задачи лабораторной работы

В лабораторной работе необходимо:

1) выполнить аппаратурное моделирование процессов возникновения внезапных и деградационных отказов и сформировать выборку данных о наработках до отказа t_i $(i = 1, ..., n)$;

2) построить гистограммы распределений наработок по этим видам отказов и проверить гипотезу о приемлемости соответствующих распределений для их описания;

3) получить точечные оценки параметров распределений и показателей безотказности;

4) построить графики характеристик безотказности.

Порядок выполнения работы

1. Статистическая обработка данных по внезапным отказам.

Определить размах $t_{\max}$ ряда наблюдений наработок до отказа. Выбрать величину $t^* \geq t_{\max}$ так, чтобы она была кратной 10 и найти величину интервала разбиения $\Delta t = t/10$.

Подсчитать число попаданий n_i наработок до отказа в i-й интервал разбиения. Если число попаданий в какой-то интервал оказалось менее пяти, то соседние интервалы необходимо объединить, а ин-

тервал с большим числом n_i можно разбить на меньшие интервалы. После коррекции интервалов их характеристики (координаты середины $t_{i\text{с}}$, начала $t_{i\text{н}}$ и конца $t_{i\text{к}}$) и количество попаданий n_i в них необходимо занести в табл. 4.1.

Рассчитать эмпирическую плотность вероятности попадания случайной наработки в i-й интервал

$$f_i^* = \frac{n_i}{n \cdot \Delta t_i}.$$

Рассчитать оценку средней наработки до отказа по формуле

$$T^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i .$$

Рассчитать оценку дисперсии D^* и среднеквадратического отклонения наработки σ^* до отказа

$$D^* = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(t_i - T^*\right)^2, \quad \sigma^* = \sqrt{D^*} .$$

Рассчитать оценки значений вероятности безотказной работы $P(t_{i\text{к}})$ для моментов времени $t_{i\text{к}}$ по уравнению

$$P^*(t_{i\text{к}}) = 1 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{i} n_j .$$

Например, для $t_{3\text{к}}$

$$P^*(t_{3\text{к}}) = 1 - \frac{1}{n} \cdot (n_1 + n_2 + n_3).$$

Для моментов времени $t_{i\text{н}}$ рассчитать оценки интенсивности отказов

$$\lambda^*(t_{i\text{н}}) = \frac{n_i}{\left[n - \sum_{j=0}^{i-1} n_j\right] \cdot \Delta t_i},$$

где величина $n - \sum_{j=0}^{i-1} n_j$ равна количеству неотказавших изделий к началу j-го интервала.

Например, для $t_{3\text{н}}$

$$\lambda^*(t_{3\text{н}}) = \frac{n_3}{\left[n - (n_1 + n_2)\right] \cdot \Delta t_3}.$$

Результаты расчетов f_i^*, $P^*(t_{i\text{к}})$, $\lambda^*(t_{i\text{н}})$ занести в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Результаты обработки данных наблюдений внезапных отказов

Значения показателей	Интервалы				
	1	2	i	…	10
Середина интервала	$t_{1\text{с}}$	$t_{2\text{с}}$	$t_{i\text{с}}$	…	$t_{10\text{с}}$
Координаты начала и конца	$\frac{t_{1\text{н}}}{t_{1\text{к}}}$	$\frac{t_{2\text{н}}}{t_{2\text{к}}}$	$\frac{t_{i\text{н}}}{t_{i\text{к}}}$	…	$\frac{t_{10\text{н}}}{t_{10\text{к}}}$
Количество попаданий	n_1	n_2	n_i	…	n_{10}
f_i^*	f_1^*	f_2^*	f_i^*	…	f_{10}^*
$P^*(t_{i\text{к}})$	$P^*(t_{1\text{к}})$	$P^*(t_{2\text{к}})$	$P^*(t_{i\text{к}})$	…	$P^*(t_{10\text{к}})$
$\lambda^*(t_{i\text{н}})$	$\lambda^*(t_{1\text{н}})$	$\lambda^*(t_{2\text{н}})$	$\lambda^*(t_{i\text{н}})$	…	$\lambda^*(t_{10\text{н}})$

2. Построение графиков показателей надежности.

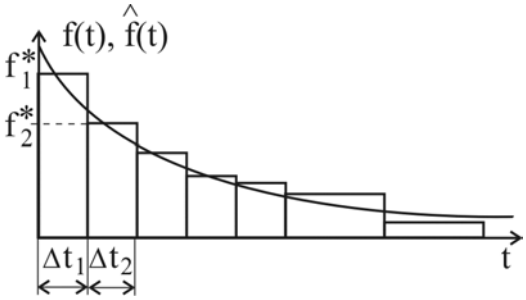


Рис.4.1. Вид гистограммы распределения

Построить гистограмму распределения наработки до отказа в виде ступенчатой фигуры (рис. 4.1).

На одном рисунке с гистограммой построить графики функций

$$f(t_i) = \frac{1}{T^*}\exp\left(-\frac{t_i}{T^*}\right),$$

$$P^*(t_{i\text{к}}),\ \lambda^*(t_{i\text{н}}),\ \lambda^* = 1/T^*.$$

Сделать качественные выводы о характере распределения наработки до отказа и о равенстве величин T и σ.

3. Проверка гипотезы о приемлемости экспоненциального распределения для описания времени наработки до отказа.

Рассчитать теоретическую вероятность P_i попадания случайной наработки в i-й интервал:

$$P_i = \exp\left(-\frac{t_{i\text{н}}}{T^*}\right) - \exp\left(-\frac{t_{i\text{к}}}{T^*}\right).$$

Величины P_i отложить в виде отличающихся ступеней на гистограмме распределения.

Рассчитать величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - n \cdot P_i)^2}{n \cdot P_i},$$

где r – количество интервалов гистограммы.

При заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}5$ по табл. 2.1 найти квантиль χ^2 распределения для числа степеней свободы $k = r - 1 - L$, где L = 1 – число параметров теоретического распределения, оцениваемых по выборке.

Необходимо сравнить рассчитанное значение χ^2 с $\chi^2_{\text{табл}}$. Если $\chi^2 < \chi^2_{\text{табл}}$, то с вероятностью ошибки 0,5 это распределение приемлемо для описания распределения наработки. Необходимо отметить, что критерий χ^2 применяют при числе интервалов $r > 15$. Поэтому вывод в данном случае не строго обоснован.

4. Статистическая обработка данных наблюдений по деградационным отказам ИЭТ.

Разбить размах реализаций наработок до деградационного отказа на десять интервалов, подсчитать количество попаданий реализаций в каждый интервал n_i, выполнить коррекцию интервалов для того, чтобы выполнялось условие $n_i \geq 5$, оценить эмпирическую плотность вероятности f_i^*, среднюю наработку до отказа T^*, дисперсию наработки D^* и значения $P^*(t_{i\text{к}})$, $\lambda^*(t_{i\text{н}})$ в соответствии с п. 1.

Заполнить таблицу, аналогичную табл. 4.1.

5. Построение и анализ графиков показателей надежности при немонотонной деградации.

Аналогично п. 2 построить гистограмму распределения наработки до отказа и кривую плотности DN-распределения (4.9), подставив вместо параметров распределения a, b их статистические оценки:

$$a^* = \frac{1}{T^*}, \qquad b^* = \frac{1}{\sigma^* \cdot \sqrt{a^*}}.$$

Построить графики зависимостей $P^*(t_{i\text{к}})$, $\lambda^*(t_{i\text{н}})$, $\lambda^* = 1/T^*$, совместив их с графиком $f(t)$ и гистограммой $\hat{f}(t)$.

Сделать выводы о характере изменения интенсивности отказов при немонотонной деградации по сравнению с экспоненциальным распределением.

6. Моделирование деградационных отказов механических элементов.

В соответствии с п. 1 выполнить статистическую обработку данных наблюдений, заполнив таблицу результатов обработки (аналогичную табл. 4.1).

Построить гистограмму распределения наработки до отказа и кривую плотности DM-распределения (4.10), подставив вместо параметров распределения a, b их статистические оценки:

$$a^* = \frac{1}{T^*}, \qquad b^* = \frac{1}{\sigma^* \cdot \sqrt{a^*}}.$$

Построить графики зависимостей $P^*(t_{i\text{к}})$, $\lambda^*(t_{i\text{н}})$, $\lambda^* = 1/T^*$, совместив их с графиком $f(t)$ и гистограммой $\hat{f}(t)$.

Сравнить графики показателей надежности с аналогичными для двух предыдущих видов отказов.

Содержание отчета

Отчет о лабораторной работе должен содержать:

– протокол данных моделирования;
– таблицы с результатами обработки данных моделирования;
– соотношения для расчета основных характеристик безотказности;
– графики характеристик $f(t)$, $\hat{f}(t)$, $P^*(t_{i\text{к}})$, $\lambda^*(t_{i\text{н}})$, $\lambda^* = 1/T^*$;
– выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит сущность основных моделей отказов?
2. Чем различаются внезапный, постепенный и деградационный отказы?
3. Что такое стационарность, ординарность и отсутствие последействия потока отказов?
4. Как определяется значение интенсивности при внезапном отказе?
5. Чем различаются два вида деградационных отказов?
6. Приведите соотношения для основных показателей безотказности.
7. Опишите последовательность проверки гипотезы о виде закона распределения.
8. Пользуясь графиком $P^*(t)$, докажите правильность оценки T^*.

Лабораторная работа № 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЙ ДОПУСКОВ НА ВЫХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Цель работы:

– изучить методику определения допуска на выходной параметр ЭС по допускам на первичные параметры;

– изучить методику применения цифрового статистического моделирования для определения допусков на выходной параметр и элементы электронных средств (ЭС).

Необходимые теоретические сведения

На технологию производства элементов ЭС (резисторов, конденсаторов, транзисторов и т.п.) влияют различные дестабилизирующие факторы, поэтому параметры комплектующих элементов имеют определенный разброс относительно номинального значения. Каждый конкретный образец устройства имеет конкретный набор элементов со случайными отклонениями от номинальных значений. От образца к образцу значения параметров комплектующих элементов изменяются также случайным образом, что приводит к случайному изменению выходного параметра устройства. Для определения вероятности нахождения выходного параметра изделия в пределах поля допуска необходимо иметь N образцов устройства, каждый из которых будет обладать своим значением выходного параметра.

При определении допусков различают задачи двух видов:

а) определение допуска на выходной параметр по допускам на первичные (прямая задача);

б) нахождение допусков на первичные параметры по допуску на выходной (обратная задача).

При расчете используют зависимость выходного (определяющего) параметра ЭС y от его первичных параметров x_i:

$$y = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (5.1)$$

Определяющий параметр y может быть коэффициентом усиления, коэффициентом нелинейных искажений, длительностью или фронтом формирующего импульса и т.п. Первичные параметры $x_1, x_2, ..., x_n$ представляют собой значения параметров резисторов, конденсаторов, транзисторов, микросхем и т.д., из которых комплектуется ЭС (как правило, функциональный узел (ФУ)).

Зависимость (5.1) часто аналитически трудно определить, поэтому в этих случаях ее можно заменить соответствующей регрессионной зависимостью, получаемой на основе специально спланированного активного эксперимента (см. лаб. работу № 7).

Допуски рассчитывают в предположении малости отклонения $\Delta x_i = x_i - x_{i0}$ первичных параметров от номинальных значений x_{i0}.

Если предположить, что зависимость (5.1) непрерывна, отклонение выходного параметра можно представить как

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left. \frac{\partial y(\vec{x})}{\partial x_i} \right|_{\vec{x}_0} \cdot \Delta x_i . \qquad (5.2)$$

Выражение (5.2) после деления левой и правой частей на $y = y(\vec{x})$ при номинальных значениях параметров x_{i0} принимает вид

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot \left. \frac{\Delta x_{i0}}{y(\vec{x})} \right|_{\vec{x}_0} \cdot \frac{\Delta x_i}{x_{i0}}, \qquad (5.3)$$

или

$$\delta y = \sum_{i=1}^{n} K_{\text{в}i} \cdot \delta x_i , \qquad (5.4)$$

где δy, δx_i – относительные отклонения выходного и первичного параметров соответственно; $K_{\text{в}i}$ – коэффициент влияния относительного отклонения первичного параметра x_i на относительное отклонение выходного параметра,

$$K_{\text{в}i} = \frac{\partial y(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{\Delta x_{i0}}{y(\vec{x})}.$$

Метод статистического моделирования (испытаний)

Этот метод основан на статистическом моделировании реализаций первичных параметров с требуемым законом распределения $f(x_i)$ и параметрами m_i, δ_i, на совместном преобразовании реализаций в соответствии с функцией (5.1) и статистической обработке последовательности получаемых значений выходного параметра. Статистическая обработка может включать в себя построение гистограммы распределения выходного параметра с установлением вида распределения и оценкой параметров либо оценкой вероятности нахождения параметра в заданной области.

При статистическом моделировании значений первичных параметров параметры, у которых коэффициент влияния существенно ни-

же основных (на два и более порядков), можно считать постоянными и равными их номинальным значениям.

Этот метод является итерационным. На каждом этапе итерационного процесса выполняют следующее:

а) корректируют значения среднеквадратических отклонений (СКО) допусков на влиятельные первичные параметры;

б) статистически моделируют значения первичных параметров в соответствии со скорректированными СКО и действительными законами распределения;

в) определяют значения выходного параметра, выполняют их статистическую обработку и оценку эффективности коррекции.

Постановка задачи лабораторной работы

В данной работе изучается метод статистического моделирования при решении прямой и обратной задач определения допусков.

Конкретным объектом исследования принята эквивалентная электрическая схема изделия (см. прил. 1).

Выходным параметром объекта является значение коэффициента усиления. Так как объект динамический, то значение выходного параметра зависит от частоты входного сигнала и представляет собой амплитудно-частотную характеристику (АЧХ). Поэтому анализ и расчеты допусков необходимо выполнить для той частоты, на которой влияние разброса значений первичных параметров максимально.

При выполнении работы закон распределения первичных параметров и их погрешностей принять нормальным. Значения первичных параметров и их изменения полагать независимыми друг от друга.

Допуск на первичные параметры установить по правилу "трех сигм".

Порядок выполнения работы

1. Для заданного варианта устройства ввести в ЭВМ аналитическое выражение выходного параметра устройства (АЧХ) как функции значений параметров элементов (сопротивлений резисторов, емкости конденсаторов и т.д.).

2. Выполнить расчет АЧХ $K\left(f, x^{\text{ном}}\right)$ в заданном диапазоне частот при номинальных значениях параметров элементов $x^{\text{ном}}$.

3. Рассчитать частотные зависимости коэффициентов влияния элементов ЭС на АЧХ по формуле

$$K_{\text{в}i}(f) = \frac{\left\{K\left(x_i^{\text{ном}} + \Delta x_i\right) - K\left(x_i^{\text{ном}}\right)\right\} \cdot x_i^{\text{ном}}}{\Delta x_i \cdot K\left(x_i^{\text{ном}}\right)},$$

где Δx_i – малое приращение номинального значения параметра $x_i^{\text{ном}}$; f – частота сигнала, $K\left(x_i^{\text{ном}}\right)$ – значение АЧХ при номинальных значениях параметров элементов.

4. Найти частотную зависимость относительной погрешности выходного параметра из выражения

$$\delta y(f) = \frac{\Delta y(f)}{y(f)} = \sum_{i=1}^{N} K_{\text{в}i} \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i},$$

где N – количество элементов в устройстве.

5. Найти частоту f_n, на которой $\left|\delta y(f_n)\right|$ достигает максимального значения, т.е. частоту, на которой влияние разброса значений элементов максимально.

6. Для выбранной частоты f_n проанализировать значения коэффициентов влияния $K_{\text{в}i}(f_n)$ по всем элементам и отобрать для статистического моделирования два-три элемента, максимально влияющих на АЧХ.

7. Задать начальное значение допуска δ на элементы ЭС.

8. Получить M нормально распределенных значений элементов с помощью алгоритма генерации случайных чисел, основанного на центральной предельной теореме (2.5).

9. Получить M значений коэффициента передачи $K_j(f_n)$.

10. Выполнить статистический анализ данных, для чего нужно:

– рассчитать среднее значение величины $K(f_n)$ и сравнить его со значением АЧХ $K_{\text{ном}}$ на частоте f_n при номинальных значениях элементов;
– рассчитать среднеквадратическое отклонение $K(f_n)$;
– найти минимальное и максимальное значения $K(f_n)$;
– построить гистограмму распределения значений $K(f_n)$.

11. Для заданного допуска d на выходной параметр определить верхнее и нижнее допустимые значения АЧХ на частоте f_n:

$$K_{\min} = K_{\text{ном}} - d \cdot K_{\text{ном}}; \quad K_{\max} = K_{\text{ном}} + d \cdot K_{\text{ном}}.$$

12. Нанести допустимые границы $K_{\min}$ и $K_{\max}$ на гистограмму распределения величины $K(f_n)$.

13. Рассчитать количество отсчетов величины $K(f_n)$, выходящих за границу допуска $\left[K_{\min}, K_{\max}\right]$.

14. Рассчитать вероятность нахождения АЧХ в пределах допуска и сравнить ее с заданной.

15. Если полученная вероятность нахождения АЧХ в пределах допуска меньше заданной, следует переопределить поля допусков на номиналы элементов обратно пропорционально их влиянию на значение выходного параметра и повторить расчеты пп. 7 – 14.

16. Сделать выводы по результатам лабораторной работы.

Содержание отчета

Отчет о лабораторной работе должен содержать:

– эквивалентную электрическую схему объекта;

– аналитическое выражение АЧХ;

– график АЧХ в заданном диапазоне частот;

– графики коэффициентов влияния по каждому из параметров в заданном диапазоне частот;

– частотную зависимость относительной погрешности выходного параметра;

– алгоритм моделирования значений первичных параметров и реализации моделируемых значений выходного параметра;

– результаты оценки среднего значения, среднеквадратического отклонения, поля допуска на выходной параметр по заданной относительной погрешности на него;

– результаты оценки вероятности нахождения выходного параметра в поле допуска;

– результаты коррекции допусков на первичные параметры.

Пример программы определения ширины поля допуска приведен в прил. 4.

Контрольные вопросы

1. Чем различаются прямая и обратная задачи расчета допусков?

2. Докажите, что при малости допусков на первичные параметры возможно линейное представление допуска на выходной параметр.

3. Что характеризует коэффициент влияния?

4. В чем суть расчета допусков на "наихудший случай"?

5. В чем суть вероятностного метода расчета допусков?

6. В чем суть метода статистического моделирования при установлении допусков? Назовите его преимущества.

7. Почему маловлияющие параметры при статистическом моделировании можно принимать условно постоянными?

8. Для чего необходимо определять частотную зависимость относительной погрешности выходного параметра?

9. Как определить вероятность нахождения параметра в поле допуска по гистограмме его распределения?

Лабораторная работа № 6

МЕТОДЫ ЦИФРОВОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ БЕЗОТКАЗНОСТИ СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

Цель работы:

– изучить методику моделирования отказов объекта по его надежностной схеме;

– получить навыки моделирования отказов по виду распределения и по параметрической модели.

Необходимые теоретические сведения

При анализе надежности технические объекты можно рассматривать как единое целое (элемент) или сложное (с позиций надежности) соединение элементов. Во втором случае возникает необходимость определить характеристики безотказности объекта по известным характеристикам безотказности составляющих частей (элементов).

С точки зрения надежности различают следующие основные типы соединений элементов (структур) (рис.6.1):

- последовательное – отказ объекта происходит при отказе одного (любого) из элементов;
- параллельное – отказ объекта происходит при отказе всех элементов;
- мостиковое – отказ объекта при отказе элементов 1, 2, 5, 4 или 3, 4, 5, 2;
- комбинированное – всевозможные комбинации указанных соединений.

Зная вероятности $P_i(t)$ безотказной работы комплектующих элементов, в предположении независимости отдельных отказов можно рассчитать такую же вероятность $P(t)$ для объекта в целом:

- для последовательного соединения (рис. 6.1,а)

$$P(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t);$$

- для параллельного соединения (рис. 6.1,б)

$$P(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - P_i(t)];$$

- для мостикового соединения (рис. 6.1,в)

$$P(t) = [2 - P_1(t) \cdot P_3(t)] \cdot [1 - P_2(t)] \cdot [1 - P_4(t)] \cdot [1 - P_5(t)].$$

Сводя комбинированное соединение к конкретной комбинации указанных соединений, можно найти $P(t)$ и для него.

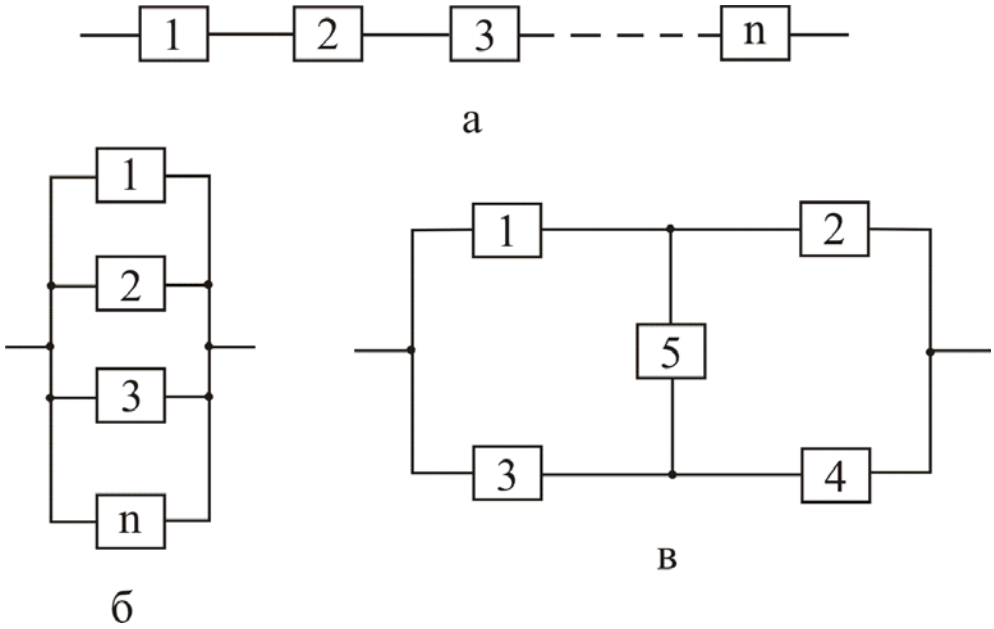


Рис. 6.1. Надежностные соединения элементов:
а – последовательное; б – параллельное; в – мостиковое

Зная $P(t)$, можно определить и другие показатели безотказности: интенсивность отказов $\lambda(t)$, среднюю наработку до отказа T (см. лаб. работу № 4). Однако такой подход во многих случаях неприемлем по следующим причинам:

а) функция $P(t)$ может оказаться очень сложной для интегрирования и взятия производных;

б) вероятности $P_i(t)$ не всегда известны, их приходится определять через другие известные характеристики;

в) вероятности $P_i(t)$ часто нельзя выразить в элементарных функциях.

В этом случае эффективным средством решения задачи оценки показателей безотказности является метод цифрового статистического моделирования наработок до отказа отдельных элементов и определения по ним наработок до отказа всего объекта с последующей статистической обработкой данных такого моделирования.

При последовательном и параллельном соединениях наработка до отказа определятся соответственно как:

$$t = \min(t_1, t_2, ..., t_n); \tag{6.1}$$

$$t = \max(t_1, t_2, ..., t_n). \tag{6.2}$$

При комбинированном соединении (рис. 6.2)

$$t = \min(t_1, \max(t_2, t_3), t_4). \tag{6.3}$$

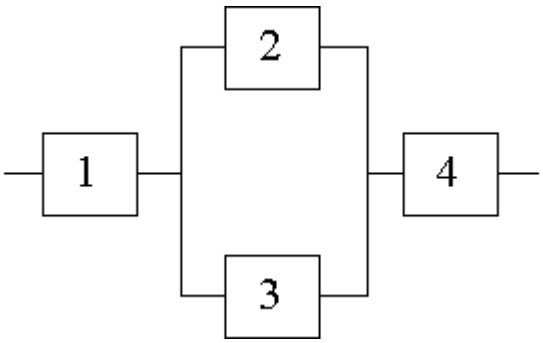


Рис. 6.2. Пример комбинированного соединения

Таким образом, задача сводится к статистическому моделированию наработок до отказа t_i отдельных элементов, и ее можно решать двумя путями:

а) статистическим моделированием реализаций наработок по заданному или определенному закону распределения;

б) статистическим моделированием параметров физической модели возникновения отказа.

В первом из этих случаев используют известный подход формирования случайных реализаций путем функционального преобразования реализаций стандартной величины r, равномерно распределенной в интервале [0, 1]. В табл. 6.1 приведены алгоритмы такого формирования для наиболее распространенных в надежности законов распределения.

Наработка до отказа является положительной непрерывной случайной величиной, поэтому для моделирования нормально распределенных наработок следует применять усеченное нормальное распределение $N(m, \sigma, a, b)$ с параметрами усечения $a = 0$ и $b = \infty$. Если же выполнимо условие $m > 3 \cdot \sigma$, то можно использовать и распределение $N(m, \sigma)$, так как вероятность появления отрицательных реализаций ничтожна.

Во втором случае для моделирования наработок используют физические модели возникновения отказов по схеме "нагрузка-прочность" или нахождения определяющего параметра в поле допуска (см. лаб. работу № 5). Во второй схеме одной из моделей изменения определяющего параметра y является полиномиальная модель

$$y(t) = \sum_{v=0}^{n} a_v \cdot t^v , \qquad (6.4)$$

где коэффициенты a_v являются случайными величинами, изменяющимися от изделия к изделию. Если задано допустимое значение $y_д$ определяющего параметра, то из уравнения

$$y_{\text{д}} = \sum_{v=0}^{n} a_v \cdot t^v \qquad (6.5)$$

получают значения наработки до параметрического отказа

$$t = \phi\left(y_{\text{д}},\ a_v\right),\ v = 0,...,n\,. \qquad (6.6)$$

Зависимость (6.6) при известных законах распределения коэффициентов a_v определяет закон распределения наработки до параметрического отказа. Статистическое моделирование этой наработки сводится к моделированию значений коэффициентов a_v обычным путем и вычислению наработки по соотношению (6.6).

Таблица 6.1

Алгоритмы моделирования наработок до отказа элементов

Закон распределения наработки t	Выражение плотности распределения $f(t)$	Алгоритмы формирования наработок t из равномерно распределенной случайной величины r
Экспоненциальный $\mathrm{E}(\lambda)$	$\lambda \cdot e^{-\lambda t}$	$t = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(r)$
Нормальный $\mathrm{N}(m,\sigma)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$t = m + \sigma\sqrt{\frac{12}{n}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} r_i - \frac{m}{2}\right]$
Вейбулла $\mathrm{B}(a,b)$	$\frac{a}{b} \cdot t^{a-1} \cdot \exp\left\{-\frac{t^a}{b}\right\}$	$t = \frac{1}{b} \cdot [-\ln(r)]^{1/a}$
Логарифмический $\mathrm{L}(m,\sigma)$	$\frac{-1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{\left[\ln\left(\frac{t}{m}\right)\right]^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\}$	$t = m \cdot \exp(\sigma \cdot N)$, $N = \sqrt{-2 \cdot \ln(r_1)} \times$ $\times \cos(2\pi \cdot r_2)$
Усеченный нормальный $\mathrm{N}(m,\sigma,a,b)$	$\begin{cases} N(m,\sigma) \text{ при } t \in [a,b] \\ 0 \quad \text{при } t \notin [a,b] \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{N(m,\sigma)}{C} \text{ при } a \le t \le b \\ 0 \quad \text{в других случаях;} \end{cases}$ $C = \int_a^b N(m,\sigma,t)dt$
Релея $\mathrm{Re}(0,\lambda)$	$\frac{t}{\lambda} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2\lambda^2}\right)$	$t = \lambda \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln(r)}$

Постановка задачи лабораторной работы

В данной лабораторной работе исследуется безотказность объектов, представленных своими надежностными схемами (табл. 6.2). Часть элементов этих схем имеет наработки до отказа, описываемые плотностями распределения $f(t_1)$, $f(t_2)$, $f(t_3)$ с представленными в табл. 6.2 параметрами. Элемент 4 подвержен параметрическим отказам по указанному в табл. 6.3 закону изменения определяющего параметра $y(t)$. Предполагают, что коэффициенты a_v подчиняются нормальному закону распределения с параметрами ma_v, σa_v, значения которых, а также допустимое значение определяющего параметра $y_д$ приведены в табл. 6.3.

В лабораторной работе необходимо разработать и реализовать в системе MathCAD алгоритм статистического моделирования наработок до отказа заданного варианта объекта.

Содержание отчета

Отчет о лабораторной работе должен содержать:

– надежностную схему объекта;

– исходные данные для моделирования (законы распределения и их параметры, вид функции $y(t)$ с коэффициентами a_v);

– алгоритмы и программы моделирования наработок до отказа как отдельных элементов, так и объекта в целом;

– результаты реализации программ моделирования.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. В соответствии с вариантом задания составить подпрограмму генерации случайных наработок до параметрического отказа.

2. В соответствии с вариантом задания и табл. 6.1 составить подпрограмму генерации наработок до отказа для элементов 1, 2, 3.

3. Составить программу моделирования наработок до отказа всего объекта.

4. Реализовать программу, выполнив генерацию 200 наработок до отказа.

5. Используя встроенную статистическую функцию $\mathrm{hist}(\ )$, построить гистограмму распределения наработки до отказа.

6. Сделать качественный вывод о характере распределения наработки до отказа.

Таблица 6.2

Данные к вариантам заданий

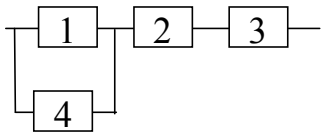
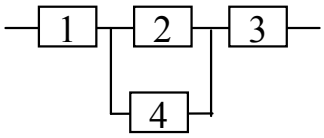
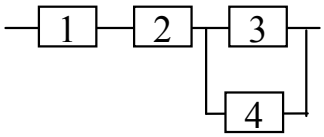
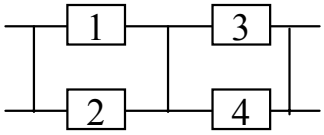
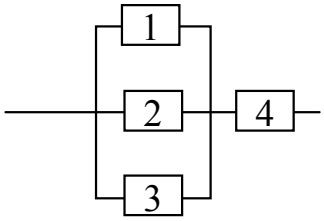
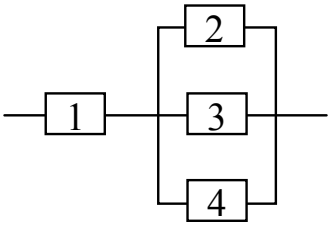
Номер варианта	Надежностная схема объекта испытаний	$f(t_1)$	$f(t_2)$	$f(t_3)$
1 2		$E(0{,}05)$ $Re(0;50)$	$N(50;6)$ $E(0{,}01)$	$L(100;1)$ $B(5;0{,}1)$
3 4		$N(60;10)$ $B(5;0{,}1)$	$E(0{,}01)$ $Re(0;50)$	$Re(0;30)$ $N(50;6)$
5 6		$L(100;1)$ $E(0{,}05)$	$N(60;10)$ $B(5;0{,}1)$	$E(0{,}01)$ $L(100;1)$
7 8		$N(60;10)$ $B(5;0{,}1)$	$Re(0;60)$ $E(0{,}01)$	$N(50;6)$ $Re(0;50)$
9 10		$E(0{,}05)$ $Re(0;50)$	$N(50;6)$ $E(0{,}01)$	$L(100;1)$ $B(10;0{,}1)$
11 12		$L(100;1)$ $E(0{,}05)$	$N(60;10)$ $B(5;0{,}1)$	$E(0{,}01)$ $L(100;1)$

Таблица 6.3

Данные для моделирования параметрической надежности элемента 4

Номер варианта	t_4					
	$y(t)$	ma_0	σa_0	ma_1	σa_1	$y_д$
1	$a_0 + a_1 \cdot t$	5	1	0,5	0,1	7
2	$a_0 + a_1 \cdot t^2$	6	1,5	2	1	10
3	$a_0 - a_1 \cdot t$	5	1	0,5	0,1	0
4	$a_0 - a_1 \cdot t^2$	6	2	0,4	0,1	1
5	$a_0 + a_1 \cdot t^3$	5	1	2	1	10
6	$a_0 - a_1 \cdot t^3$	6	1	2	1	1
7	$a_0 - a_1 \cdot t$	5	1	0,5	0,1	0
8	$a_0 - a_1 \cdot t^2$	6	2	0,4	0,1	1
9	$a_0 + a_1 \cdot t$	5	1	0,5	0,1	7
10	$a_0 + a_1 \cdot t^2$	6	1,5	2	1	10
11	$a_0 + a_1 \cdot t^3$	5	1	2	1	10
12	$a_0 - a_1 \cdot t^3$	6	1	2	1	1

Контрольные вопросы

1. Получите соотношения вероятности безотказной работы для типовых соединений элементов с точки зрения надежности: последовательного, параллельного, мостикового.
2. Запишите выражение вероятности безотказной работы для заданной преподавателем комбинированной схемы.
3. Получите выражение наработки до отказа объекта по заданной надежностной схеме.
4. Как моделируются параметрические отказы?
5. Приведите формулы, связывающие вероятность безотказной работы $P(t)$ с другими показателями безотказности.

Лабораторная работа № 7

МЕТОДИКА АКТИВНОГО ОПТИМАЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ПОСТРОЕНИЮ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ОБЪЕКТОВ

Цель работы:

– изучить методику планирования, проведения и обработки данных активного оптимального эксперимента и построения регрессионной модели выходных параметров радиотехнического объекта на примере полного факторного эксперимента;

– получить навыки в практическом планировании, проведении и обработке данных эксперимента и работе с необходимыми статистическими таблицами.

Необходимые теоретические сведения

Показатели качества технических объектов (электронных средств, технологических процессов) зависят от ряда физических, химических, электрических и других факторов, например, температуры окружающей среды, величины питающего напряжения, номиналов электрорадиоэлементов и т.д. Знание этих функциональных зависимостей необходимо для решения задач назначения допусков, выбора оптимальных режимов и т.п. В большинстве случаев влияние таких факторов теоретически можно описать весьма приближенно, поэтому возникает необходимость экспериментального определения связей между независимыми переменными (факторами) x_i и зависимой переменной (откликом) y. Это и составляет предмет регрессионного анализа, а найденную зависимость называют регрессионной.

Часто структура регрессионной модели из теоретических предположений или из предшествующего опыта известна, а не известны ее параметры θ_i, которые и должны быть определены в результате регрессионного эксперимента.

Выделяют следующие разновидности регрессионных моделей:

– линейную по переменным и параметрам:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_p \cdot x_p;$$

– линейную по параметрам, но нелинейную по переменным:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + ... + a_p \cdot x^p;$$

– линейную по переменным, но нелинейную по параметрам:

$$y = a_0 + a_1 \cdot a_2 \cdot x_1 + a_1 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + ...;$$

– нелинейную по переменным и параметрам, например:

$$y = \exp(a_1 \cdot x_1) + \exp(a_2 \cdot x_2).$$

Линейную по параметрам модель в общем виде можно представить как

$$y = a_0 \cdot f_0(\vec{x}) + a_1 \cdot f_1(\vec{x}) + \ldots,$$

где $\vec{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_n)$, T – символ транспонирования.

Если же функциональная структура зависимости не известна, то можно воспользоваться ее разложением в ряд Тейлора в окрестностях опорной точки $\vec{x}_0$ и представить в виде

$$y = a_0 \cdot 1 + \sum a_i \cdot x_i + \sum a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum a_{ijk} \cdot x_i \cdot x_j \cdot x_k + \sum a_{ii} \cdot x_i^2 + \ldots. \quad (7.1)$$

В выражение (7.1) можно ввести новые обозначения переменных:

$1 = x_0$, $x_i = x_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, $x_i \cdot x_j = x_k$ $(k = n+1, \ldots, m)$ и т.д.,

и свести модель (7.1) к виду линейной по параметрам модели:

$$y = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot x_k. \quad (7.2)$$

К этому же виду в окрестностях точек $\vec{x}_0$ могут быть сведены модели с известной структурой регрессионной зависимости. Таким образом, модель (7.2) является универсальной и в небольших диапазонах изменения переменных x_i хорошо соответствует действительному поведению функции $y(x_i)$.

Введя матричные обозначения

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix},$$

выражение (7.2) можно представить в виде

$$\vec{y} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{x} = \mathbf{a} \cdot \vec{x}^{\mathrm{T}}. \quad (7.3)$$

Особенностью любого эксперимента являются погрешности в измерении переменных. С учетом этого соотношение (7.3) можно записать как

$$\vec{y} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{x} + \varepsilon, \quad (7.4)$$

где ε – обобщенная аддитивная погрешность (помеха).

Помеху ε часто можно считать центрированной нормально распределенной величиной с распределением

$$f(\varepsilon) = N(0, \sigma_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_\varepsilon} \exp\left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2 \cdot \sigma_\varepsilon^2} \right\}.$$

Предположим, проведено N серий экспериментальных наблюдений, результаты которых можно представить в матричном виде

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{01} & \dots & x_{n1} \\ . & \dots & . \\ . & \dots & . \\ x_{0N} & \dots & x_{nN} \end{bmatrix}, \quad \vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ . \\ . \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}, \tag{7.5}$$

где $\mathbf{X}$ называется планом-матрицей эксперимента. Столбцы матрицы $\mathbf{X}$ содержат значения варьируемых факторов, а строки – условия проведения опытов.

Матричные переменные в (7.5) связаны соотношением

$$\vec{y} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} + \vec{\varepsilon}\,. \tag{7.6}$$

Применяя к выражению (7.6) метод наименьших квадратов, получают оценку $\hat{a}$ вектора $\mathbf{a}$ неизвестных коэффициентов a_i в виде

$$\hat{a} = \left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X}\right)^{-1} \cdot \mathbf{X}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{y}\,, \tag{7.7}$$

где информационная матрица $\mathbf{C} = \left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X}\right)^{-1}$ определяет ковариационные свойства вектора оценок $\hat{a}$ (при этом вектор $\hat{a}$ является случайным, так как случаен вектор $\vec{y}$) и, в частности, величины дисперсии или точность оценок $\hat{a}_i$ коэффициентов a_i.

Регрессионный эксперимент называют пассивным, если переменные x_i только регистрируют в ходе эксперимента, и активным, если в ходе эксперимента переменными управляет экспериментатор. В последнем случае есть возможность получать матрицу $\mathbf{C}$ с наперед заданными свойствами. При этом матрицу $\mathbf{X}$ эксперимента следует формировать по определенным правилам. Это приводит к различным планам активного эксперимента.

В данной работе в качестве примера рассматривают один из таких планов: полный факторный эксперимент (ПФЭ) с условным обозначением 2^p, где p – число независимых переменных x_i в векторе $\vec{x}$; 2 – количество уровней варьирования переменными x_i.

Этот план эксперимента приводит к следующему:

1) матрица $\mathbf{C}$ диагонализируется, что соответствует ортогонализации столбцов матрицы $\mathbf{X}$ эксперимента (поэтому этот план относят к группе "ортогональных");

2) регрессионная зависимость представляется в виде полинома первого порядка:

$$y = a_0 + \sum a_i \cdot x_i + \sum a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum a_{ijk} \cdot x_i \cdot x_j \cdot x_k\,;$$

3) число независимых переменных p определяет полное число

переменных и коэффициентов линейной модели $M = 2^p$ и минимально необходимое число строк матрицы эксперимента $K = 2^p$, т.е. матрица эксперимента является квадратной;

4) оценки $\hat{a}_i$ коэффициентов полинома оказываются независимыми друг от друга и одинаково точными;

5) варьирование независимых переменных x_i осуществляется всего лишь на двух уровнях ($x_{i\min} = -1$, $x_{i\max} = +1$) по правилу: частота смены знака в каждом последующем столбце независимых факторов снижается в два раза.

ПФЭ называется оптимальным, так как он дает возможность получить математическую модель объекта (в виде линейного полинома) при минимальном количестве опытов и с максимальной точностью описания факторного пространства.

Изучение основных положений методики планирования, проведения и обработки данных на примере ПФЭ и составляет цель данной работы.

Лабораторный макет

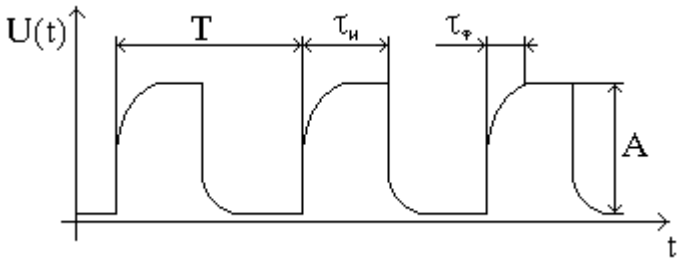


Рис. 7.1. Последовательность импульсов

Объектом регрессионного анализа в данной лабораторной работе является мультивибратор, предназначенный для генерации последовательности импульсов (рис. 7.1). Эта последовательность импульсов характеризуется следующими параметрами:

– амплитудой импульса A;

– длительностью переднего фронта $\tau_ф$;

– длительностью импульса $\tau_и$;

– периодом T или частотой f следования импульсов, связанных однозначно соотношением $f = 1/T$.

Поскольку мультивибратор (рис. 7.2) состоит из двух активных элементов (VT_1, VT_2) и восьми пассивных элементов ($R_1,\ldots,R_6$, C_1, C_2), то каждый из вышеуказанных параметров импульсов является функцией параметров схемы

$$y = f\left(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, C_1, C_2\right),$$

или

$$y = f(x_i),\ i = 1,...,8.$$

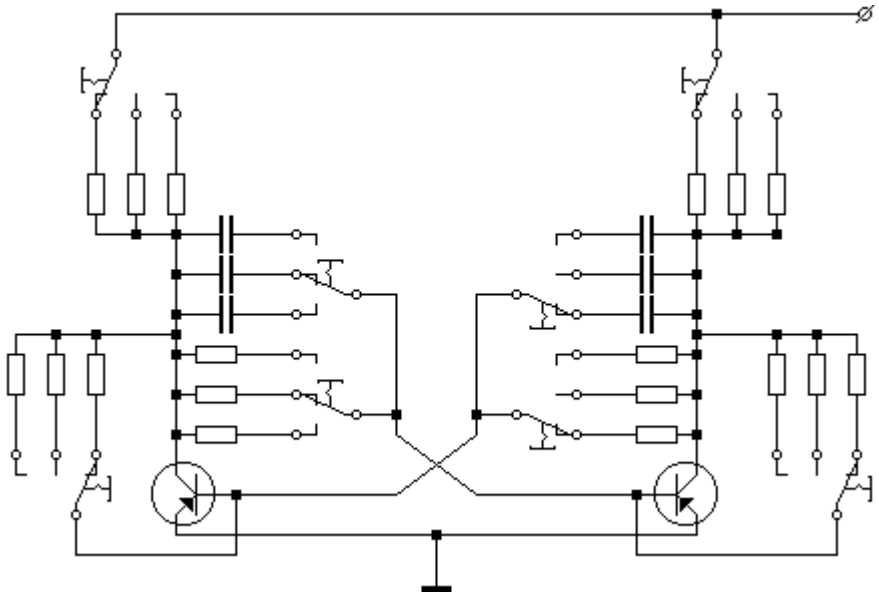


Рис. 7.2. Схема электрическая принципиальная мультивибратора

Каждым из факторов $R_1,\ldots,R_6$, C_1, C_2 с помощью одного из восьми тумблеров в макете (рис. 7.3) можно варьировать на трех уровнях:

- $x_{i\,\min}$ – левое положение;
- x_{i0} – центральное положение;
- $x_{i\,\max}$ – правое положение.

При этом шаг варьирования параметрами λ_i находится в диапазоне от $0{,}1x_{i0}$ до $0{,}3x_{i0}$.

Кроме того, влияние активных элементов VT_1, VT_2 на выходные параметры мультивибратора (амплитуду, длительность переднего фронта, длительность импульса, частоту последовательности импульсов) моделируют с помощью тумблера на четыре положения, к контактным группам которого подключены четыре пары транзисторов одного типа. За счет технологического разброса параметров транзисторов значения выходных параметров мультивибратора случайным образом изменяются, что дает возможность получить в эксперименте четыре значения функции отклика y_i при одних и тех же значениях входных факторов (пассивных элементов $R_1,\ldots,R_6$, C_1, C_2):

$$y_i = y + \varepsilon_i\ \ (i = 1,...,4).$$

Макет имеет выход для подключения измерительного прибора. Передняя панель макета показана на рис. 7.3.

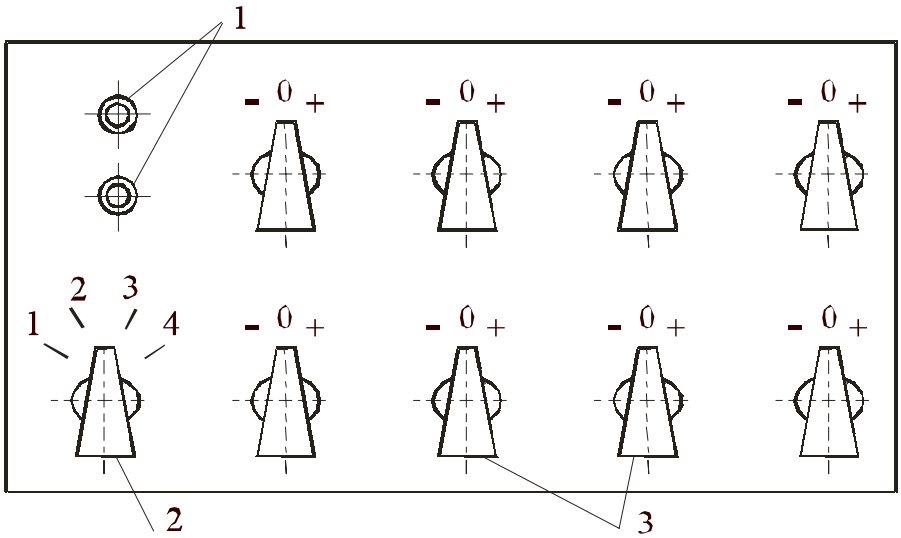


Рис. 7.3. Передняя панель макета:
1 – выход мультивибратора; 2 – переключатель пар транзисторов;
3 – переключатели входных параметров мультивибратора

Постановка задачи лабораторной работы

В лабораторной работе необходимо с помощью ПФЭ получить регрессионную модель зависимости одного из параметров выходного сигнала объекта исследования от трех независимых входных факторов $y = f(x_1, x_2, x_3)$ в виде полинома первого порядка:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + \\ + a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + a_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3. \quad (7.8)$$

Вид выходного параметра задает преподаватель. Факторы x_1, x_2, x_3 выбирают студенты в ходе предварительного эксперимента.

Содержание работы

А. Проведение предварительного эксперимента

Предварительный эксперимент проводят в целях выделения из восьми входных независимых факторов трех, наиболее влияющих на исследуемый выходной параметр $y(x_i)$, и он не носит обязательный для методики характер.

Всем факторам x_i последовательно дают приращения $x_{i\,\min}$, $x_{i\,\max}$ и фиксируют при этом размах варьирования выходной переменной: $\Delta y_i = y(x_{i\,\min}) - y(x_{i\,\max})$. По максимальному абсолютному значению величины $|\Delta y_i|$ выбирают три самых влиятельных фактора.

Б. Предварительное планирование эксперимента

Выполняют переход от реальных независимых переменных x_i к нормированным переменным x_i' по соотношениям

$$\lambda_i = \frac{x_{i\max} - x_{i\min}}{2},\ x_{i0} = \frac{x_{i\max} + x_{i\min}}{2},\ x_i' = \frac{x_i - x_{i0}}{\lambda_i}.$$

Тогда $x'_{i\min} = -1$, $x'_{i\max} = +1$.

Переходят к регрессионному полиному в нормированных переменных (штрих при переменных условно опущен):

$$y = a_0 \cdot x_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 +$$
$$+ a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + a_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

В. Планирование ПФЭ 2^3

Составляют заготовку таблицы эксперимента (табл. 7.1).

Принимают $x_0 \equiv 1$. Столбцы x_1, x_2, x_3 заполняют значениями ±1 факторов (пишется только знак, единица условно опускается).

Для обеспечения ортогональности плана эксперимента варьирование независимыми переменными в столбцах x_1, x_2, x_3 необходимо осуществлять с разной частотой (x_1 – максимальная частота смены знака, x_2 – частота снижена в два раза по сравнению с x_1, x_3 – частота варьирования снижена в два раза по сравнению с x_2).

Определяют знаки в производных столбцах $x_i \cdot x_j$.

Для устранения систематической погрешности эксперимента порядок проведения опытов рандомизируют с помощью таблицы случайных чисел (табл. 7.2). Для этого каждой строчке плана присваивают случайный порядковый номер (от 1 до 8), встретившийся при произвольном движении по ячейкам таблицы (цифры «0» и «9», а также повторяющиеся числа игнорируют).

Г. Проведение эксперимента

ПФЭ проводят в соответствии с порядком после рандомизации, выставляя значения x_1, x_2, x_3 (соответствующими тумблерами) равными $x_{i\min}$ или $x_{i\max}$ согласно коду строки. По каждой строке плана измеряют выходной параметр y_{iv} для четырех пар транзисторов, переводя переключатель в каждое из четырех положений. Данные измерений заносят в колонки графы "Выходной параметр".

Таблица 7.1

Полный факторный эксперимент 2^3

Номер опыта	Номер после рандомизации	Значения факторов								Выходной параметр y_v				Данные обработки			
		x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot x_3$	$x_2 \cdot x_3$	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	y_1	y_2	y_3	y_4	my_v	Dy_v	$\hat{y}_v$	$\lvert my_v - \hat{y}_v \rvert$
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6																	
7																	
8																	
$\hat{a}_i$																	
t_i																	
$a_{i\text{зн}}$																	

Таблица 7.2

Случайные числа

1087	6601	8272	8815	3368	2377	6416	2914	6061	3361
1480	1794	2465	6446	7466	0656	2050	3813	6891	7627
0674	8354	9769	8055	8918	9768	5967	5642	4673	1799
3269	2157	8516	3581	5997	9915	3039	0576	1538	3774
9656	3044	4607	1838	9036	2547	1603	6609	3721	9422
9896	0797	4035	6729	9390	4499	0890	8603	6201	2985
1554	3512	0804	6788	7000	5372	5481	8333	1928	7992
8423	1820	1025	0818	4328	5568	7603	6443	3828	8562
3173	2858	6607	5397	9054	5901	5544	6354	3631	9889
1716	1819	1327	6885	2623	2772	1909	7573	8469	1553

Д. Предварительная обработка данных эксперимента

Определяют построчные математические ожидания и дисперсии

$$my_v = \frac{1}{\gamma} \cdot \sum_{i=1}^{\gamma} y_{iv}, \qquad Dy_v = \frac{1}{\gamma - 1} \cdot \sum_{i=1}^{\gamma} \left(y_{iv} - my_v\right)^2,$$

где $\gamma = 4$ – число параллельных опытов; $v = 1,...,8$ – номер строки плана-матрицы эксперимента.

Проверяют гипотезу о воспроизводимости эксперимента.

Воспроизводимостью эксперимента называют свойство повторяемости его данных в серии повторных экспериментов. Поскольку эти данные случайны, то можно говорить лишь о повторяемости некоторых характеристик результатов опытов. Такой характеристикой является построчная дисперсия Dy_v, которая не должна существенно изменяться по строкам эксперимента.

Гипотезу о воспроизводимости эксперимента проверяют, используя критерий Кохрена. Для этого рассчитывают величину

$$G = \frac{Dy_{\max}}{\sum_{v=1}^{K} Dy_v},$$

где $K = 8$ – число строк в плане эксперимента; $Dy_{\max}$ – максимальная из построчных дисперсий,

Значение G сравнивают с квантилем распределения Кохрена $G_{\text{табл}}\left(q, K, f_1\right)$, где q – уровень значимости (вероятность ошибки); $f_1 = \gamma - 1$ – число степеней свободы; K – число дублированных строк.

Для $q = 0{,}05$; $f_1 = 3$ и $K = 8$ $\quad G_{\text{табл}} = 0{,}4377$.

Если $G > G_{\text{табл}}$, то эксперимент невоспроизводим. В этом случае необходимо:

- либо увеличить число параллельных опытов;
- либо повысить точность измерений;
- либо применить к данным нелинейные преобразования вида $\sqrt{y}$, $\ln(y)$, $\exp(y)$ и т.д.

Если эксперимент воспроизводим, то рассчитывают значение дисперсии воспроизводимости

$$Dy = \frac{1}{K} \cdot \sum_{v=1}^{K} Dy_v$$

и переходят к основной обработке данных.

Е. Основная обработка данных эксперимента

Рассчитывают оценки коэффициентов a_i:

$$\hat{a}_i = \frac{1}{K} \cdot \sum_{v=1}^{K} x_{iv} \cdot my_v, \quad i = 0,...,M-1,$$

где $M = 8$ – число переменных x_i и коэффициентов a_i модели.

Проверяют значимость каждого коэффициента по критерию Стьюдента. Для этого рассчитывают значение

$$t_i = |\hat{a}_i| \cdot \sqrt{\frac{K \cdot \gamma}{Dy}}$$

и сравнивают его с квантилем распределения Стьюдента $t_{\text{табл}}(q, f_2)$; q – уровень значимости, $f_2 = K \cdot (\gamma - 1)$ – число степеней свободы.

Для $q = 0{,}05$ и $f_2 = 24$ $\quad t_{\text{табл}} = 2{,}06$.

Если $t_i < t_{\text{табл}}$, то i-й коэффициент считают незначимым и обнуляют.

Значения $\hat{a}_i$, t_i и $a_{i\,\text{знач}}$ заносят в табл. 7.1.

Ж. Вычисление значений выходного параметра

Найденные значения коэффициентов $a_{i\,\text{знач}}$ подставляют в модель (7.8) и рассчитывают предсказанные моделью величины выходного параметра $\hat{y}_v$ для каждой строки плана эксперимента.

Рассчитанные значения $\hat{y}_v$ записывают в табл. 7.1.

З. Проверка адекватности модели

Модель считается адекватной, если она с достаточной точностью описывает поведение моделируемого объекта.

Если количество (d) значимых коэффициентов модели меньше полного числа (M) коэффициентов, то адекватность определяют по критерию Фишера. Для этого вычисляют дисперсию адекватности

$$D_{\text{ад}} = \frac{1}{M-d} \cdot \sum_{v=1}^{K} \left(my_v - \hat{y}_v\right)^2$$

и величину

$$F = D_{\text{ад}} / Dy .$$

Если $F < 1$, то модель считают адекватной. Иначе сравнивают F с квантилем распределения Фишера $F_{\text{табл}}(q, f_2, f_3)$, где q – уровень значимости; $f_2 = K \cdot (\gamma - 1)$ и $f_3 = M - d$ – степени свободы.

$F_{\text{табл}}$ для $q = 0{,}05$ и $f_2 = 24$ выбирают из табл. 7.3.

Таблица 7.3

Квантили распределения Фишера

f_3	1	2	3	4	5	6	7
$F_{\text{табл}}$	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42

Если $F < F_{\text{табл}}$, то модель считают адекватной.

Если количество значимых коэффициентов равно их полному числу, то адекватность модели определяют следующим образом:

– вычисляют относительные ошибки выходного параметра

$$\delta_v = \frac{\left|my_v - \hat{y}_v\right|}{my_v} \cdot 100\% ;$$

– выбирают максимальную величину δ_v и сравнивают с допустимым значением относительной ошибки $\delta_{v\,\text{доп}} = 5\%$;

– если $\max \delta_v < \delta_{v\,\text{доп}}$, то модель считают адекватной.

И. Вывод

На основании результатов проверки адекватности (п. ***З***) делают вывод о применимости или неприменимости полученной модели (регрессионного полинома первой степени) для данного объекта.

Добиться адекватности модели можно путем применения нелинейного преобразования функции отклика.

Порядок выполнения работы

1. Получить у преподавателя задание на исследование одного из параметров выходного сигнала мультивибратора.
2. Включить лабораторную установку и убедиться в наличии установившегося режима генерации мультивибратора.
3. В соответствии с п. ***А*** провести предварительный эксперимент и выбрать три первичных фактора из восьми.
4. В соответствии с п. ***В*** осуществить планирование ПФЭ.
5. Провести эксперимент, дублируя каждую строку плана четыре раза (п. ***Г***).
6. В соответствии с п. ***Д*** выполнить предварительную обработку данных, обеспечив (при необходимости) воспроизводимость данных путем нелинейного преобразования отклика.
7. Выполнить основную обработку данных (п. ***Е***), получив модель в виде регрессионного полинома со значимыми коэффициентами.
8. В соответствии с п. ***З*** проверить адекватность модели. При необходимости (для обеспечения адекватности) применить нелинейное преобразование отклика.

Содержание отчета

Отчет о лабораторной работе должен содержать:

– таблицу плана эксперимента с результатами планирования, данными эксперимента и результатами обработки данных;

– основные расчетные соотношения по отдельным этапам методики и результаты расчетов;

– выводы по определяющим пунктам методики;

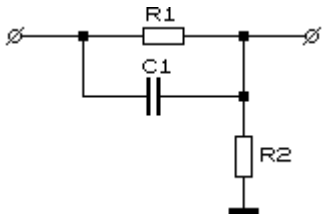
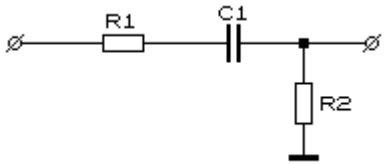
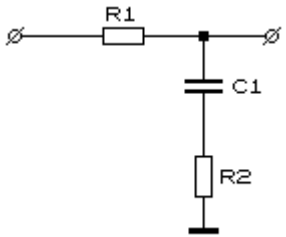
– итоговую регрессионную модель.

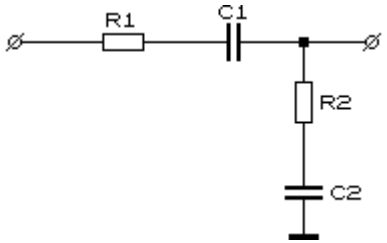
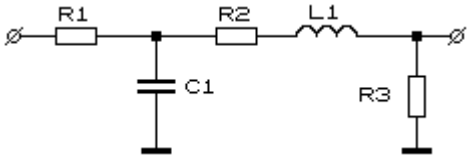
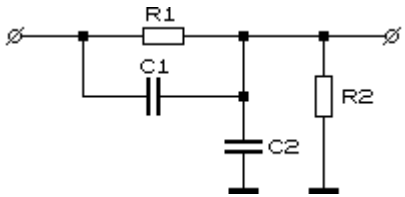
Контрольные вопросы

1. В чем состоит отличие активного эксперимента от пассивного?
2. В чем состоит основная задача оптимального эксперимента?
3. Как осуществить нормировку параметров и для чего?
4. Как построить ортогональную матрицу эксперимента?
5. Что такое воспроизводимость эксперимента?
6. Как оценить значимость факторов регрессионной модели?
7. В чем состоит сущность понятия "адекватность модели"?
8. Как осуществить проверку адекватности модели?
9. Что такое рандомизация опытов и для чего ее выполняют?
10. Как в лабораторном макете имитируют разброс значений параметров и влияние помехи?

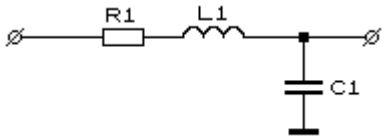
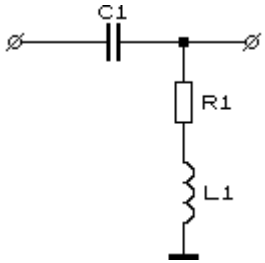
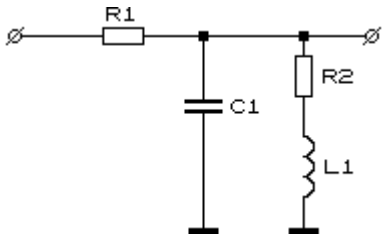
Приложение 1

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

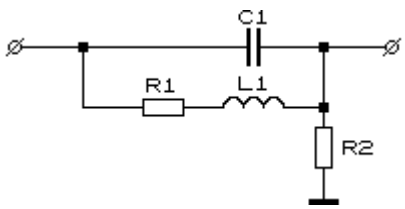
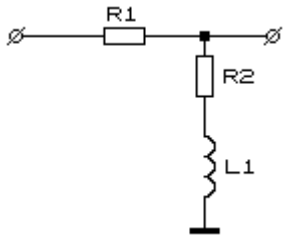
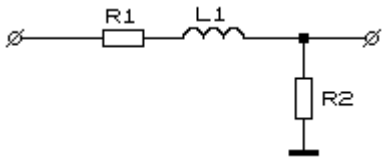
Номер варианта	Электрическая модель объекта	Передаточная функция объекта	Параметры
1		$K(p)=\dfrac{p\cdot R_1\cdot R_2\cdot C_1+R_2}{p\cdot R_1\cdot R_2\cdot C_1+R_1+R_2}$	R_1 = 10000 R_2 = 1000 C_1 = 4,7·10^{-6}
2		$K(p)=\dfrac{p\cdot R_2\cdot C_1}{p\cdot(R_1+R_2)\cdot C_1+1}$	R_1 = 10 R_2 = 1000 C_1 = 10^{-6}
3		$K(p)=\dfrac{p\cdot R_2\cdot C_1+1}{p\cdot(R_1+R_2)\cdot C_1+1}$	R_1 = 10000 R_2 = 1000 C_1 = 4,7·10^{-7}

Номер варианта	Электрическая модель объекта	Передаточная функция объекта	Параметры
4		$K(p)=\dfrac{p\cdot R_2\cdot C_1+1}{p\cdot(R_1+R_2)\cdot C_2+\dfrac{C_2}{C_1}+1}$	R_1 = 3000 R_2 = 10 C_1 = 10^{-5} C_2 = $0{,}68\cdot10^{-6}$
5		$K(p)=R_3/\{p^2\cdot R_1\cdot C_1\cdot L_1+$ $+p\cdot[(R_2+R_3)\cdot R_1\cdot C_1+L_1]+$ $+R_2+R_3\}$	R_1 = 5100 R_2 = 2 R_3 = 1000 C_1 = 10^{-6} L_1 = 10^{-3}
6		$K(p)=\{p\cdot R_1\cdot R_2\cdot C_1+$ $+R_2\}/p\cdot R_1\cdot R_2\cdot(C_1+$ $+C_2)+R_1+R_2\}$	R_1 = 1000 R_2 = 100 C_1 = $47\cdot10^{-6}$ C_2 = $68\cdot10^{-8}$

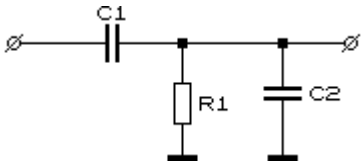
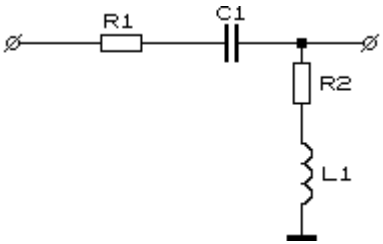
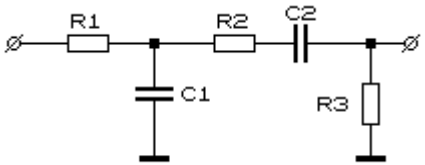
Продолжение прил. 1

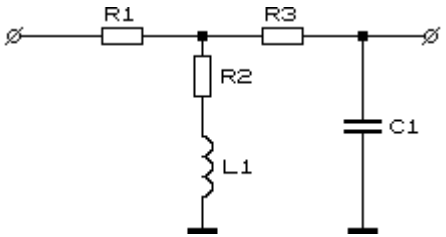
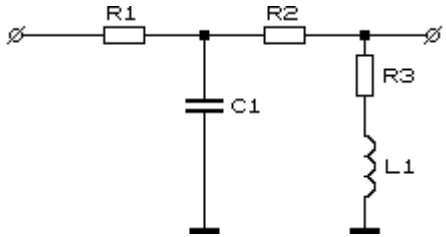
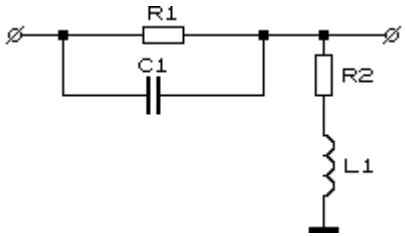
Номер варианта	Электрическая модель объекта	Передаточная функция объекта	Параметры
7		$K(p)=\dfrac{1}{p^2\cdot C_1\cdot L_1+p\cdot R_1\cdot C_1+1}$	R_1 = 1 C_1 = 10^{-4} L_1 = 10^{-2}
8		$K(p)=\dfrac{p^2\cdot C_1\cdot L_1+p\cdot R_1\cdot C_1}{p^2\cdot C_1\cdot L_1+p\cdot R_1\cdot C_1+1}$	R_1 = 5,1 C_1 = 10^{-4} L_1 = 10^{-2}
9		$K(p)=(p\cdot L_1+R_2)/\{p^2\cdot R_1\cdot C_1\cdot L_1+$ $+p\cdot(R_1\cdot R_2\cdot C_1+L_1)+R_1+R_2\}$	R_1 = 5,1 R_2 = 0,1 C_1 = $68\cdot10^{-6}$ L_1 = 10^{-2}

Продолжение прил. 1

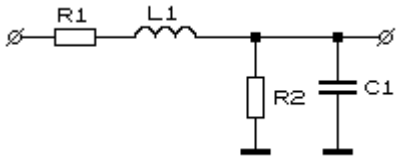
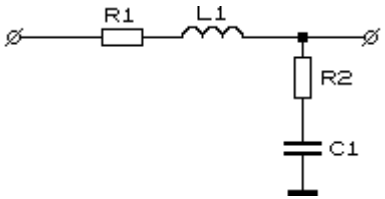
Номер варианта	Электрическая модель объекта	Передаточная функция объекта	Параметры
10		$K(p)=\dfrac{\left\{\begin{matrix}p^2\cdot R_2\cdot C_1\cdot L_1+\\+p\cdot R_1\cdot R_2\cdot C_1+R_2\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}p^2\cdot R_2\cdot C_1\cdot L_1+p\cdot(R_1\times\\\times R_2\cdot C_1+L_1)+R_1+R_2\end{matrix}\right\}}$	R_1 = 1 R_2 = 18 C_1 = 10^{-4} L_1 = 10^{-2}
11		$K(p)=\dfrac{p\cdot L_1+R_2}{p\cdot L_1+R_1+R_2}$	R_1 = 10 R_2 = 2 L_1 = $5\cdot10^{-2}$
12		$K(p)=\dfrac{R_2}{p\cdot L_1+R_1+R_2}$	R_1 = 1 R_2 = 10 L_1 = 10^{-2}

Продолжение прил. 1

Номер варианта	Электрическая модель объекта	Передаточная функция объекта	Параметры
13		$K(p)=\dfrac{p\cdot R_1\cdot C_1}{p\cdot R_1\cdot(C_1+C_2)+1}$	R_1 = 10^3 C_1 = 10^{-7} C_2 = $3{,}3\cdot10^{-6}$
14		$K(p)=\{p^2\cdot C_1\cdot L_1+p\cdot C_1\cdot R_2\}/$ $/\{p^2\cdot C_1\cdot L_1+p\cdot C_1\cdot(R_1+R_2)\}$	R_1 = 6,8 R_2 = 1 C_1 = 10^{-6} L_1 = 10^{-2}
15		$K(p)=\{p\cdot R_3\cdot C_2\}/\{p^2\cdot R_1\cdot C_1\times$ $\times C_2\cdot(R_2+R_3)+p\cdot[(R_2+R_3)\times$ $\times C_2+R_1\cdot C_2]+1\}$	R_1 = 8200 R_2 = 1 R_3 = 10^3 C_1 = 10^{-7} C_2 = $3{,}3\cdot10^{-6}$

Номер варианта	Электрическая модель объекта	Передаточная функция объекта	Параметры
16		$K(p)=\{p\cdot L_1+R_2\}/\{p^2\cdot R_3\times$ $\times C_1\cdot L_1+p\cdot[(R_1+R_2)\cdot R_3\cdot C_1+$ $+L_1]+R_1+R_2\}$	R_1 = 1 R_2 = 0,1 R_3 = 10^3 C_1 = 10^{-6} L_1 = 10^{-2}
17		$K(p)=\{p\cdot L_1+R_3\}/\{p^2\cdot R_1\times$ $\times C_1\cdot L_1+p\cdot[(R_2+R_3)\cdot R_1\times$ $\times C_1+L_1]+R_2+R_3\}$	R_1 = 10^4 R_2 = 1 R_3 = 0,1 C_1 = 10^{-7} L_1 = 10^{-2}
18		$K(p)=\dfrac{\left\{\begin{matrix}p^2\cdot R_1\cdot C_1\cdot L_1+\\+p\cdot(R_1\cdot R_2\cdot C_1+L_1)+R_2\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}p^2\cdot R_1\cdot C_1\cdot L_1+p\cdot(R_1\times\\\times R_2\cdot C_1+L_1)+R_1+R_2\end{matrix}\right\}}$	R_1 = 1000 R_2 = 1 C_1 = $47\cdot10^{-6}$ L_1 = 10^{-2}

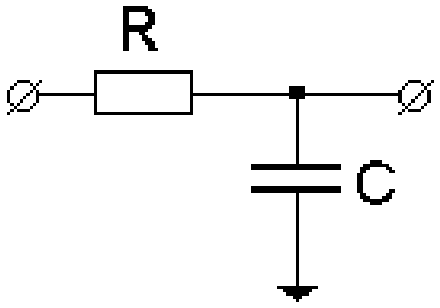
Окончание прил. 1

Номер варианта	Электрическая модель объекта	Передаточная функция объекта	Параметры
19		$K(p)=\dfrac{R_2}{\left\{\begin{array}{l}p^2\cdot R_2\cdot C_1\cdot L_1+p\cdot(R_1\times\\ \times R_2\cdot C_1+L_1)+R_1+R_2\end{array}\right\}}$	R_1 = 2 R_2 = 10^3 C_1 = 10^{-4} L_1 = 10^{-2}
20		$K(p)=\dfrac{p\cdot R_2\cdot C_1+1}{\left\{\begin{array}{l}p^2\cdot C_1\cdot L_1+p\cdot(R_1+\\ +R_2)\cdot C_1+1\end{array}\right\}}$	R_1 = 2 R_2 = 1 C_1 = 10^{-5} L_1 = 10^{-2}

Приложение 2

ПРИМЕР ПРОГРАММЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

Электрическая модель объекта



Уравнение передаточной функции

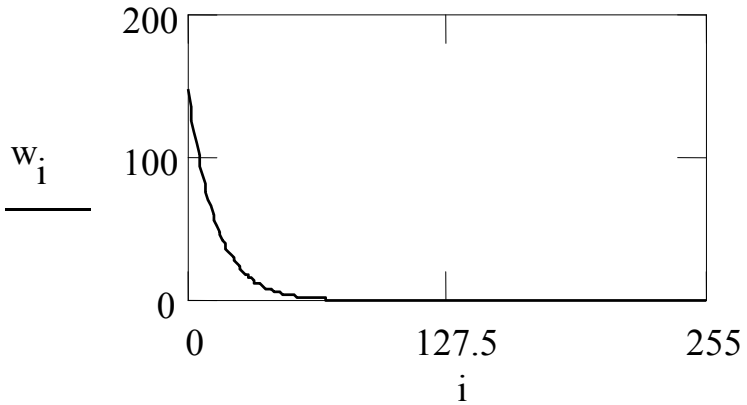
$$K(p) = \frac{1}{p \cdot R \cdot C + 1}$$

Исходные данные:

параметры электрической модели объекта	$c := 6.8 \cdot 10^{-7}$ $r := 10000$ $a := r \cdot c$
максимальная частота	$F := 1000$
количество отсчетов по времени	$N := 256$ $i := 0..N-1$
количество отсчетов по частоте	$M := \frac{N}{2}$
шаг дискретизации по времени	$dT := \frac{1}{2 \cdot F}$
шаг дискретизации по частоте	$dF := \frac{F}{M}$

Импульсная переходная характеристика

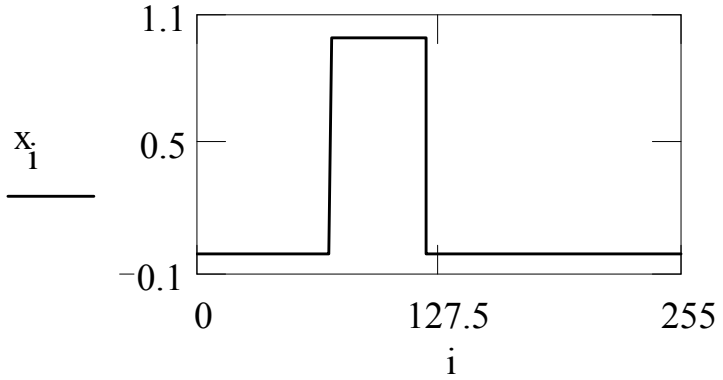
$$w_i := \frac{1}{a} \cdot \exp\left(-\frac{i \cdot dT}{a}\right)$$



Входное воздействие
(прямоугольный импульс)

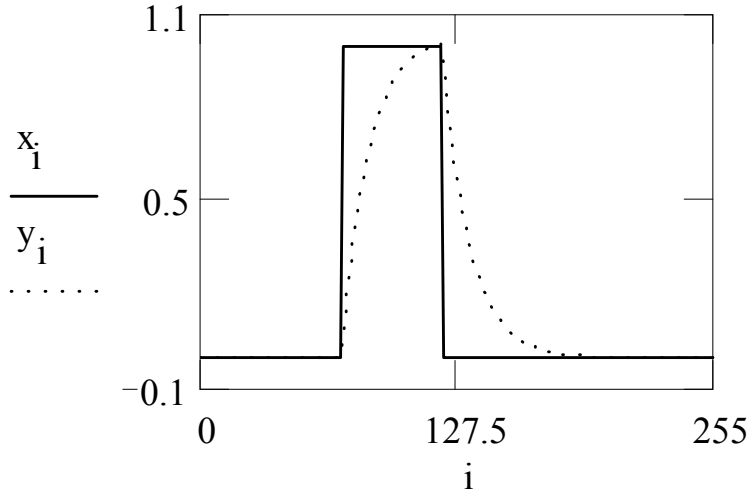
$$x_i := \mathrm{if}(i > 70, 1, 0)$$

$$x_i := \mathrm{if}(i > 120, 0, x_i)$$



Моделирование прямым методом

$$j := 0..N-1 \qquad y_i := dT \cdot \sum_j w_j \cdot x_{\mathrm{if}(i<j,\,0,\,i-j)} \qquad y1_i := y_i$$

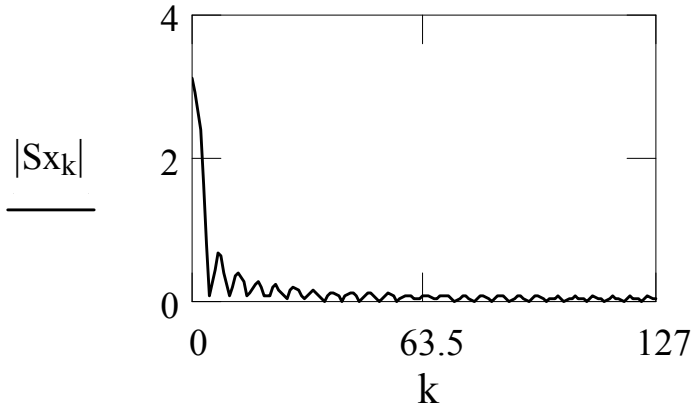


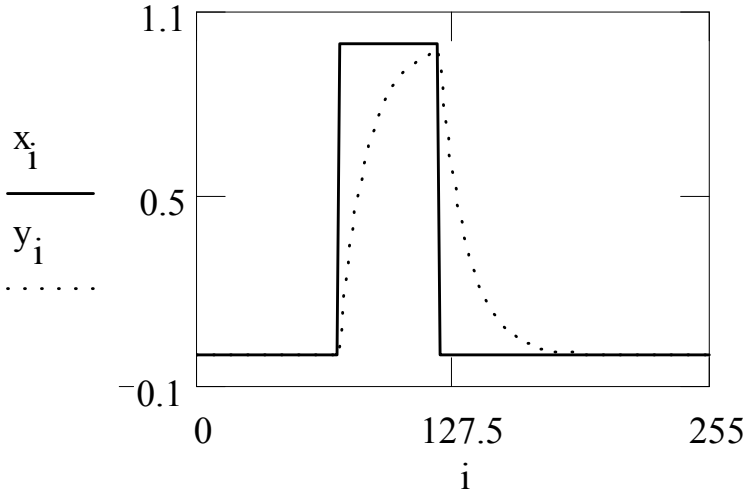
Моделирование методом преобразования Фурье

$k := 0..M$ $\quad Sx := fft(x)$ $\quad p_k := 2i \cdot \pi \cdot dF \cdot k$

$$W_k := \frac{1}{a \cdot p_k + 1} \qquad G_k := \overline{W_k} \cdot Sx_k$$

$$y := ifft(G) \qquad y2_i := y_i$$





Моделирование рекуррентным методом

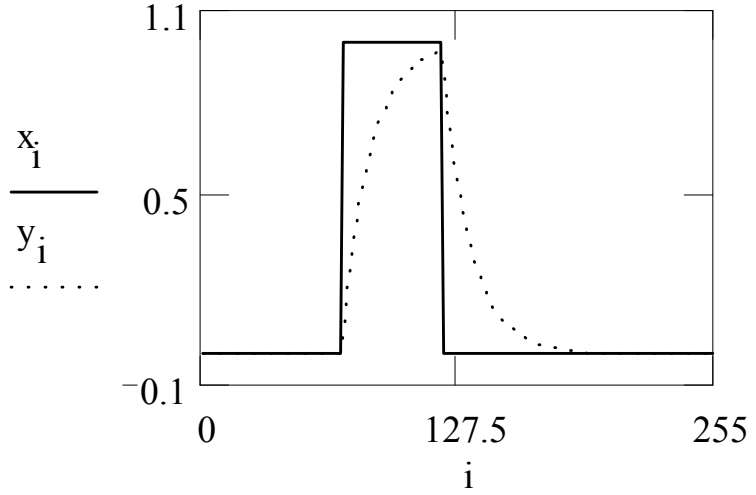
Ввод начальных условий:

$y_0 := 0$

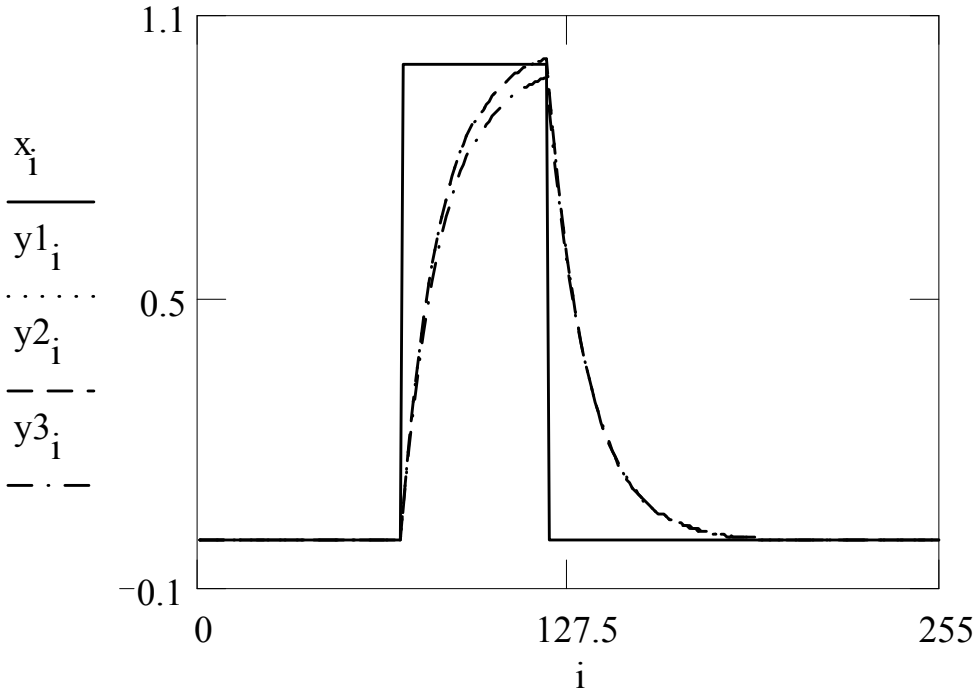
Переопределение переменной цикла:

$i := 1..N - 1$

$$y_i := \frac{a \cdot y_{i-1} + dT \cdot x_i}{a + dT} \qquad y3_i := y_i$$



Сравнение результатов моделирования



Приложение 3

ПРИМЕР ПРОГРАММЫ ПРОВЕРКИ КАЧЕСТВА ВСТРОЕННОГО ГЕНЕРАТОРА СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Исходные данные:

объем выборки случайных величин	$N := 200$	
количество интервалов гистограммы	$M := 10$	
переменные циклов моделирования	$i := 1..N$	$j := 0..M$
границы плотности распределения	$a := 1$	$b := 2$

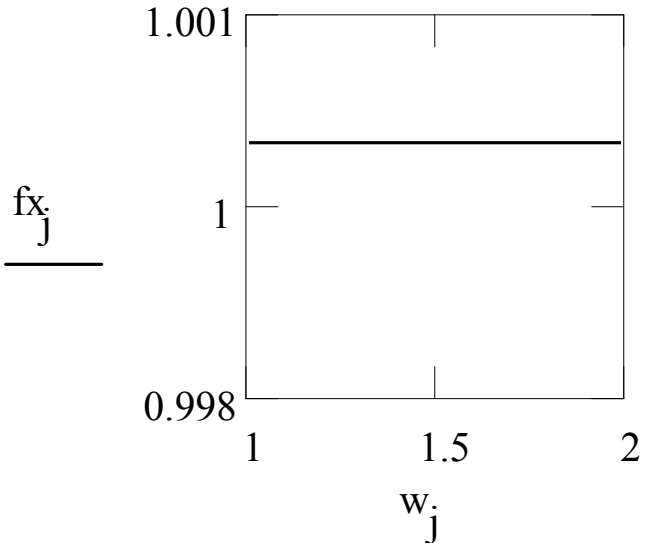
Теоретический анализ

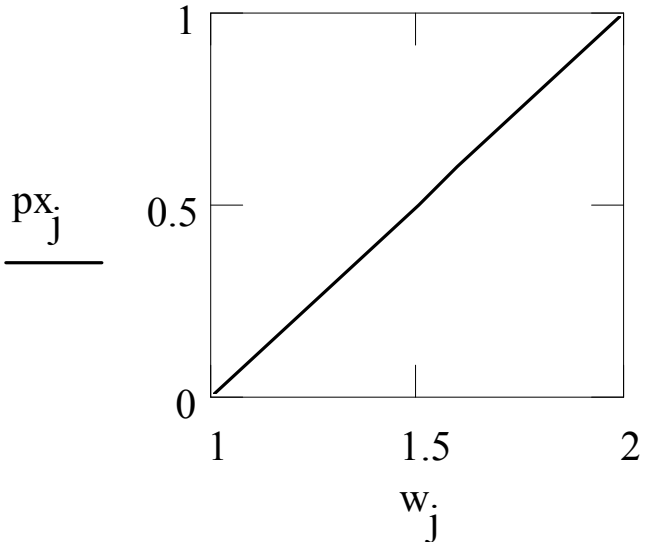
Плотность равновероятного распределения $f(z)$ $\quad f(z) := \dfrac{1}{b - a}$

Интегральная функция $F(z)$ $\quad F(z) := \int_a^z f(z)\,dz$

Массив точек для построения графиков плотности распределения, интегральной функции и гистограммы $\quad w_j := (b - a)\cdot\dfrac{j}{M} + a$

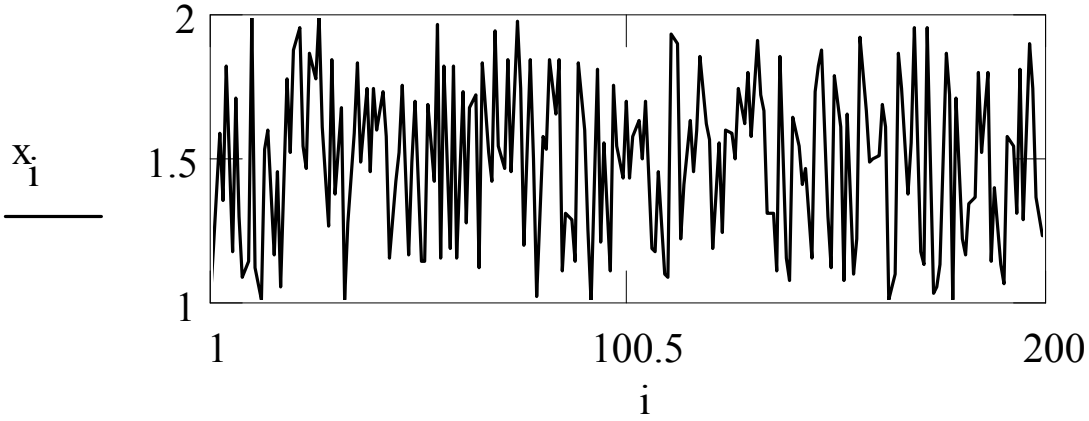
$fx_j := f(w_j)$ $\qquad px_j := F(w_j)$





Генерация случайных чисел

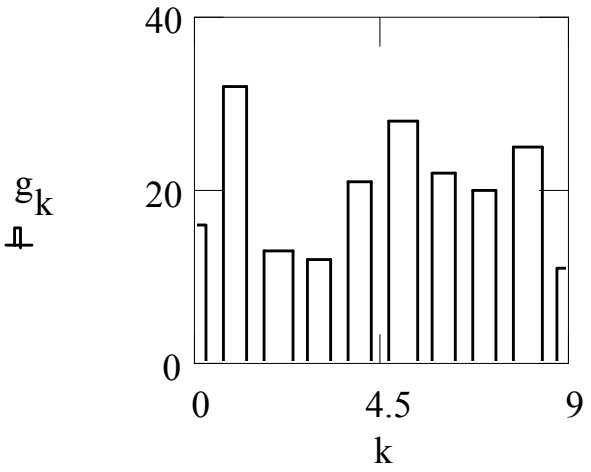
$x_i := rnd(1)$ $\qquad$ $x_i := x_i \cdot (b - a) + a$



Анализ соответствия распределения выборки равномерному распределению по критерию χ^2

Построение гистограммы выборки случайной величины x_i:

$g := hist(w, x)$ $\qquad$ $k := 0..M - 1$

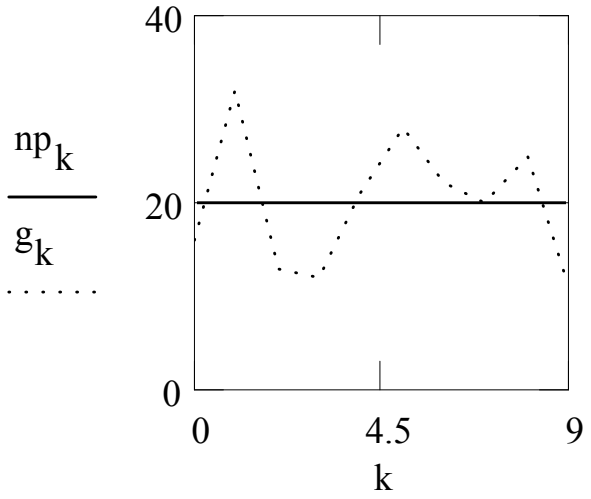


Теоретическая вероятность попадания величины x_i в интервал $[w_k, w_{k+1}]$:

$$p_k := \int_{w_k}^{w_{k+1}} f(z)dz$$

Теоретическое число попаданий x_i в k-й интервал гистограммы:

$$np_k := N \cdot p_k$$



Расчет значения критерия χ^2

$$xi2 := \sum_k \left[\frac{(np_k - g_k)^2}{np_k} \right]$$

Вывод результата:

$$xi2 := 22.4$$

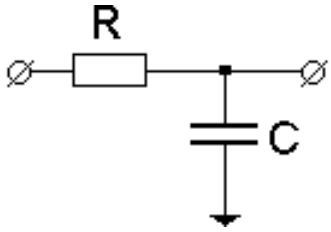
Приложение 4

ПРИМЕР ПРОГРАММЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ШИРИНЫ ПОЛЯ ДОПУСКА

Исходные данные:

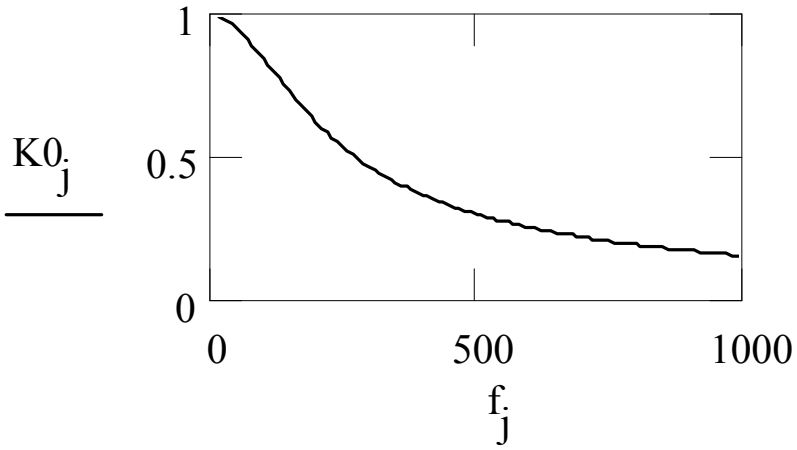
номинальные значения параметров элементов	$C := 10^{-6}$
	$R := 1000$
переменная цикла	$j := 0..100$
шаг дискретизации по частоте	$dF := 10$
массив значений частот	$f_j := j \cdot dF$

Электрическая модель объекта



Расчет частотной характеристики

$$K(f, R, C) := \left| \frac{1}{1 + 6.28i \cdot f \cdot R \cdot C} \right| \qquad K0_j := K(f_j, R, C)$$



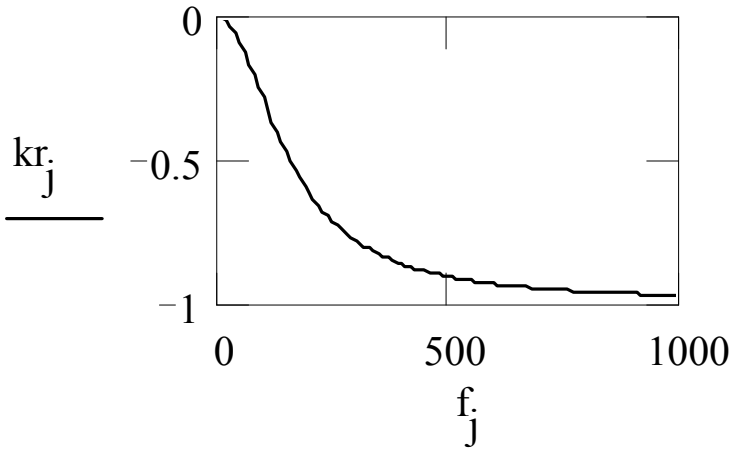
Расчет коэффициентов влияния

Для резистора

$dr := 0.01 \cdot R$ первичный допуск

$$kr_j := \frac{K(f_j, R + dr, C) - K0_j}{dr} \qquad kr_j := kr_j \cdot \frac{R}{K0_j}$$

Зависимость коэффициента влияния резистора от частоты:

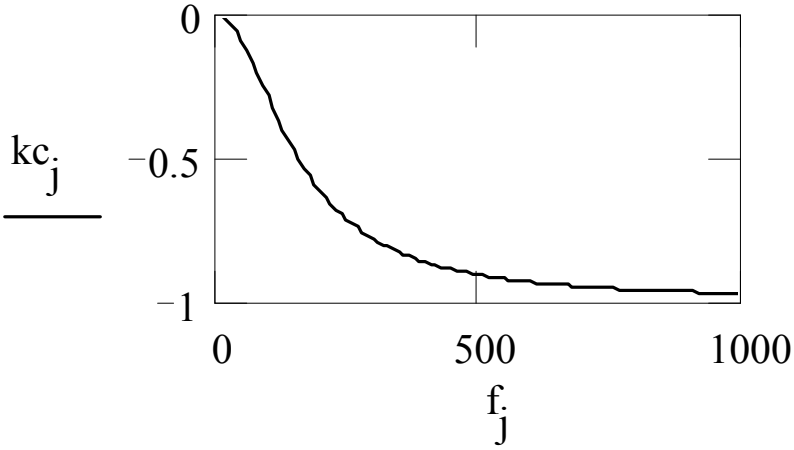


Для конденсатора

$dc := 0.01 \cdot C$
первичный допуск

$$kc_j := \frac{K(f_j, R, C + dc) - K0_j}{dc} \qquad kc_j := kc_j \cdot \frac{C}{K0_j}$$

Зависимость коэффициента влияния конденсатора от частоты:

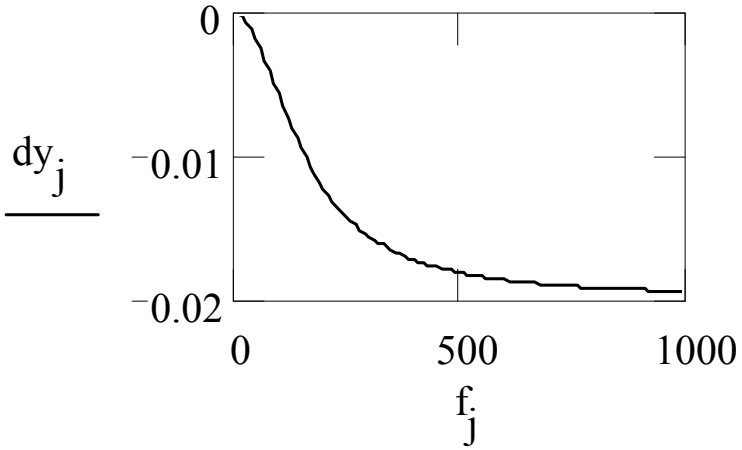


Зависимость относительной погрешности выходного параметра от частоты

$$dy_j := kr_j \cdot \frac{dr}{R} + kc_j \cdot \frac{dc}{C} \qquad dy_j := |dy_j|$$

Определение максимального значения относительной погрешности выходного параметра:

$$max_dy := max(dy)$$



Частота максимального отклонения АЧХ

Определение номера элемента в массиве частот f_j, соответствующего максимальному значению относительной погрешности выходного параметра в массиве dy_j:

$$n := \sum_j \mathrm{if}\left(dy_j = \mathrm{max_dy}, j, 0\right)$$

Вывод результатов:

$n = 100$	$f_n := 1 \cdot 10^3$	$kr_n := -0.966$	$kc_n := -0.966$
номер частоты максимального отклонения АЧХ в массиве f_j	частота максимального отклонения АЧХ	значения коэффициентов влияния первичных параметров (R и C) на частоте f_n	

Статистическое моделирование технологического разброса R, C

Допуски на элементы:

$dr := 0.1 \cdot R$

$dc := 0.1 \cdot C$

Генератор случайных чисел

$i := 0..200 \qquad m := 24 \qquad q := 1..m$

$$\mathrm{NormRnd}(z) := \sqrt{\frac{12}{m}} \cdot \left(\sum_q \mathrm{rnd}(1) - \frac{m}{2}\right)$$

Генерация случайных параметров R, C и расчет АЧХ

$$r_i := \mathrm{NormRnd}(i)\cdot\frac{dr}{3}+R \qquad c_i := \mathrm{NormRnd}(i)\cdot\frac{dc}{3}+C$$

$$k_i := K(f_n, r_i, c_i)$$

Анализ результатов моделирования

Оценка математического ожидания значения выходного параметра: $mk := \mathrm{mean}(k)$

Оценка среднеквадратического отклонения выходного параметра: $ms := \mathrm{stdev}(k)$

Вывод результатов: $mk = 0.157$

$ms = 7{,}49\cdot 10^{-3}$

АЧХ на частоте f_n при номинальных значениях R, C:

$$K0_n = 0.157$$

Расчет минимально и максимально допустимых значений АЧХ (значение допуска на выходной параметр принято равным 10%):

$$k0\min := K0_n - 0.1\cdot K0_n \qquad k0\max := K0_n + 0.1\cdot K0_n$$

Построение гистограммы выходного параметра

Определение интервала изменения АЧХ (минимальное и максимальное значение): $mink := \min(k)$

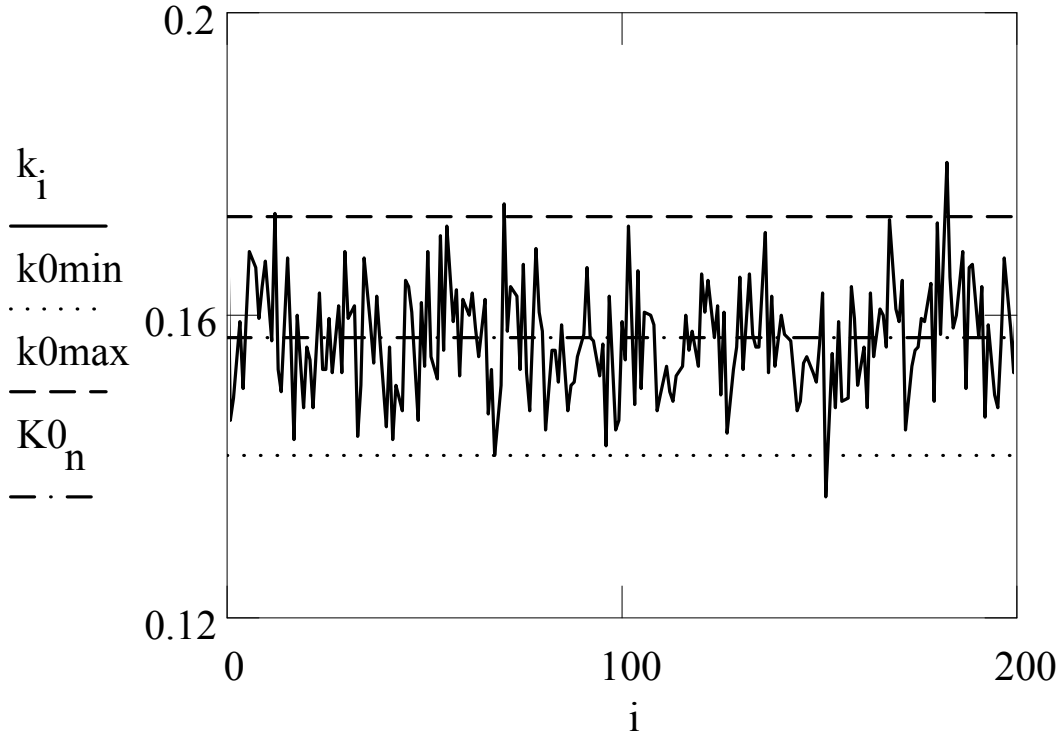
$maxk := \max(k)$

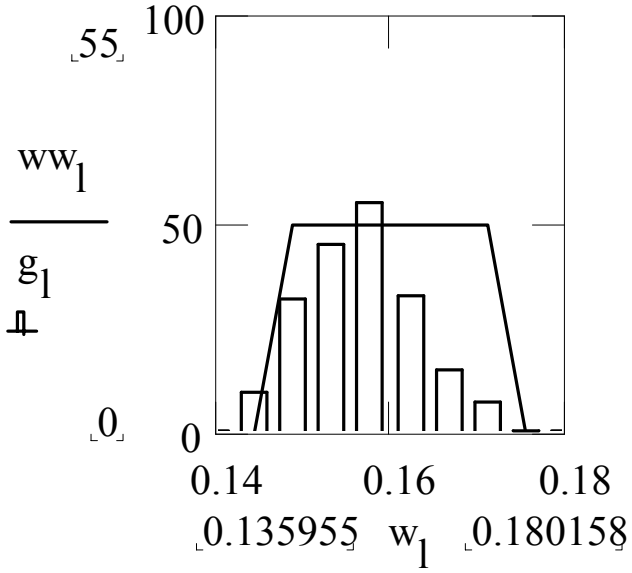
Ввод переменных цикла для построения гистограммы: $ll := 0..10$

$l := 0..9$

$$w_{ll} := (maxk - mink)\cdot\frac{ll}{9} + mink \qquad g := \mathrm{hist}(w, k)$$

$$ww_l := \mathrm{if}(w_l < k0min, 0, 50) \qquad ww_l := \mathrm{if}(w_l > k0max, 0, ww_l)$$





Расчет вероятности пребывания выходного параметра
в пределах поля допуска

$$Nmin := \sum_i if(k_i < k0min, 1, 0) \qquad Nmax := \sum_i if(k_i > k0min, 1, 0)$$

$$P := \frac{201 - Nmin - Nmax}{201}$$

Вывод результата:

$$P = 0.97$$

Библиографический список

1. Коновалов Г.Ф. Радиоавтоматика: Учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1990. – 335 с.
2. Быков В.В. Цифровое моделирование в статической радиотехнике – М.: Сов. радио, 1971. – 328 с.
3. Тетельбаум И.М., Шнейдер Ю.Р. Практика аналогового моделирования динамических систем: Справочное пособие – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 384 с.
4. Кофанов Ю.Н. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности радиоэлектронных средств: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1983. – 310 с.
5. Фролов В.А. Анализ и оптимизация в прикладных задачах конструирования РЭС: Учеб. пособие – К.: Вища шк., 1981. – 310 с.
6. Яншин А.А. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности ЭВА: Учеб. пособие для вузов – М.: Радио и связь, 1983. – 312 с.
7. Львович Я.Е., Фролов В.Н. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности РЭА: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1986. – 192 с.
8. Бабаков М.Ф., Попов А.В. Методы машинного моделирования в проектировании электронной аппаратуры: Учеб. пособие. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2002. – 89 с.
9. Бабаков М.Ф., Попов А.В., Луханин М.И. Математические модели электронных аппаратов и систем: Учеб. пособие. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2003. – 109 с.

Содержание

Лабораторная работа № 1. Цифровое моделирование детерминированных сигналов и воздействий 3

Лабораторная работа № 2. Методы цифрового статистического моделирования значений сигналов, воздействий и параметров 6

Лабораторная работа № 3. Цифровое моделирование динамических объектов 14

Лабораторная работа № 4. Исследование моделей внезапного и деградационного отказов 19

Лабораторная работа № 5. Определение полей допусков на выходные параметры и элементы электронных средств методом статистического моделирования 27

Лабораторная работа № 6. Методы цифрового статистического моделирования безотказности сложных объектов 32

Лабораторная работа № 7. Методика активного оптимального эксперимента по построению регрессионных моделей объектов 39

Приложение 1. Варианты заданий к лабораторным работам 51

Приложение 2. Пример программы моделирования линейного динамического объекта 58

Приложение 3. Пример программы проверки качества встроенного генератора случайных чисел 62

Приложение 4. Пример программы определения ширины поля допуска 65

Библиографический список 70

Бабаков Михаил Федорович
Попов Анатолий Владиславович
Луханин Михаил Иванович

ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРОННЫХ АППАРАТОВ

Редактор Е.Ф. Сережкина

Св. план, 2004
Подписано в печать 08.04.2004
Формат 60×84 1/16. Бум. офс. № 2. Офс. печ.
Усл. печ. л. 4. Уч.-изд. л. 4,5. Т. 75 экз. Заказ 116. Цена свободная
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
"Харьковский авиационный институт"
61070, Харьков–70, ул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Издательский центр “ХАИ”
61070, Харьков–70, ул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu