

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского
"Харьковский авиационный институт "

М.Ф. Бабаков, А.В. Попов, М.И. Луханин

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
ЭЛЕКТРОННЫХ АППАРАТОВ И СИСТЕМ**

Учебное пособие

Харьков «ХАИ» 2003

УДК 621.396.6

Математические модели электронных аппаратов и систем /М.Ф. Бабаков, А.В. Попов, М.И. Луханин. - Учеб. пособие. - Харьков: Нац. аэрокосмический ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2003. – 109 с.

Приведены теоретические основы машинного моделирования, используемые при проектировании электронной аппаратуры, которые входят в программу подготовки бакалавров по направлению "Электронные аппараты". Рассмотрены общие принципы моделирования, основные математические модели сигналов, воздействий и процессов в электронных системах, а также основные наиболее широко применяемые математические модели электронных систем.

Для студентов факультета радиотехнических систем летательных аппаратов.

Ил. Табл. . Библиогр.: назв.

Рецензенты: канд. техн. наук В.И. Луценко,
канд. техн. наук С.И. Хоменко

© Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского
"Харьковский авиационный институт ", 2003 г.

ВВЕДЕНИЕ

Проектирование электронных аппаратов и систем является сложным научно-техническим процессом, методологической основой которого является математическое моделирование с использованием системного подхода. Согласно системному подходу к проектированию разработчику электронной системы необходимо выявить все внешние связи проектируемого изделия, все внешние факторы, влияющие на функционирование системы, и разработать математические модели, описывающие не только процессы, протекающие внутри системы, но и вне нее. Математическое моделирование является основой для разработки других видов и методов моделирования – физического, имитационного, вероятностного и т.д. При этом моделирование существенно снижает сроки и стоимость проектирования, за счет анализа большого количества вариантов повышает эффективность разрабатываемой системы, а также позволяет исследовать поведение проектируемой системы в различных условиях и при различных сочетаниях внешних факторов, что не всегда можно реализовать в процессе натуральных испытаний разработанного изделия.

Многообразие физических процессов, протекающих в электронных системах, требует привлечения для решения задач математического моделирования самых различных математических методов из разных областей математической теории.

В данном учебном пособии представлены основные математические модели сигналов, воздействий и процессов в электронных системах, а также основные наиболее широко применяемые математические модели электронных систем.

1. МЕТОДОЛОГИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ АППАРАТОВ И СИСТЕМ

1.1 Системный подход к проектированию электронных аппаратов и систем

Разработка электронной аппаратуры (ЭА) сложный и многоэтапный процесс, одним из важнейших этапов которого является проектирование. На данном этапе жизненного цикла ЭА одно из основных мест занимает разработка научно обоснованных математических моделей проектируемого изделия с учетом особенностей его структуры построения, функционирования, технологии производства и условий эксплуатации. Методологической основой решения данной задачи является системотехника. При системном проектировании объект рассматривается как система, предназначенная для достижения определенных целей.

Система – это совокупность элементов, объединенных некоторой формой взаимодействия для достижения определенных целей.

Электронная система – совокупность функционально взаимодействующих автономных электронных устройств и комплексов, образующих целостное единство, обладающая свойством перестройки структуры в целях рационального выбора и использования входящих в нее средств нижних уровней для решения технических задач.

В виде системы может быть представлен конкретный электронный аппарат, его узел, отдельная часть его конструкции, тепловой или любой другой физический процесс в конструкции, а также процесс проектирования системы, технология ее производства, либо процесс эксплуатации изделия как самостоятельные объекты рассмотрения.

В дальнейшем под технической системой будем понимать любую систему, которая может быть подвергнута системному анализу и другим методам системотехники. Признаками того, что объект проектирования можно рассматривать как систему являются:

- эмерджентность – система как совокупность элементов обла-

- дает новыми свойствами, не присущими ни одному из ее элементов и не сводящимися к сумме свойств элементов системы;
- многомодельность – для анализа системы необходимо привлечение многих теорий и научных дисциплин, например, схемотехники, механики, теории тепломассообмена, теории электромагнитного поля и т.д.;
 - структурная сложность – система включает в себя большое число элементов с различными связями между ними, разнообразными физико-химическими процессами и множеством иерархических уровней;
 - сложный характер функционирования – множество возможных состояний системы при функционировании, сложный характер перехода из одного состояния в другое состояние, наличие воздействия внешней среды на функционирование системы, а также наличие неопределенности, связанной с текущим состоянием системы и влиянием внешней среды.

В связи с этим при проектировании используется системный подход, т.е. представление анализируемого объекта в виде системы с учетом всех взаимосвязей между его элементами и всех взаимосвязей с окружающей средой.

Системный подход – понятие, означающее представление проектируемого объекта в виде замкнутой системы и комплексное, с учетом всех взаимосвязей, изучение рассматриваемого объекта как единого целого с позиций системного анализа.

Принципы системного подхода к проектированию:

1. Принцип декомпозиции – система как сложный объект делится на ряд подсистем, которые проектируются отдельно; системный подход требует при рассмотрении любой подсистемы учета всех других подсистем и их влияния на проектируемую подсистему.
2. Принцип многомодельности – декомпозиция системы осуществляется на подсистемы, описываемые различными моделями: одна подсистема – одна модель; взаимодействие подсистем описывается взаимодействием моделей (результат "работы" одной модели используется в качестве исходных данных для

другой).

3. Принцип оптимальности – оптимальность отдельных подсистем не гарантирует оптимальности системы в целом; отсюда следует, что оптимизация системы должна производиться на более высоком уровне (с точки зрения суперсистемы, в которую вводит данная система).
4. Принцип компромисса (следствие принципа оптимальности) – проектирование системы как единого целого связано с принятием компромиссных решений, обеспечивающих оптимальность всей системы, может быть, за счет ухудшения эффективности отдельных подсистем.
5. Принцип многовариантности – уже на начальных этапах проектирования должны быть рассмотрены и проанализированы все возможные варианты структуры системы и отобраны те, которые наилучшим образом удовлетворяют требованиям к системе.
6. Принцип предпочтения перспективы – при проектировании предпочтение отдается тем вариантам построения системы, которые имеют перспективу развития (например, используют перспективную элементную базу, или возможна их последующая модернизация).
7. Принцип наихудших воздействий – для выбора оптимального варианта системы необходимо использовать единый численный критерий эффективности, который бы учитывал с определенными весовыми коэффициентами все стороны функционирования системы и влияние внешних факторов.

1.2 Классификация систем

Любая техническая система может быть представлена в виде "черного ящика", выполняющего некоторую функцию преобразования информации в условиях внешних воздействий (рис. 1.1).

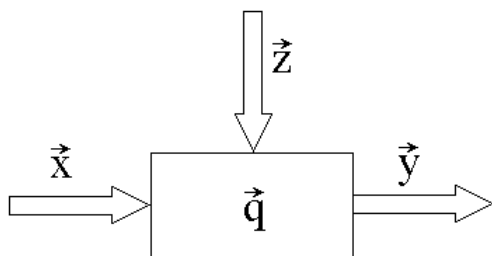


Рис. 1.1. Системотехническая модель объекта проектирования

При таком представлении системы:

- \vec{x} - множество входных воздействий (сигналов), поступающих в систему;
- \vec{z} - множество внешних, связанных с окружающей средой, факторов воздействующих на систему. Эти

факторы могут быть:

- контролируемые или неконтролируемые;
 - управляемые или неуправляемые;
 - детерминированными или случайными.
- \vec{q} - множество внутренних параметров системы, в том числе состояния системы в предыдущие моменты времени;
 - \vec{y} - вектор выходных параметров – реакция системы на входные воздействия и внешние факторы:

$$\vec{y}(\rho) = A\{\vec{x}(\rho), \vec{q}(\rho, \vec{z})\}, \quad (1.1)$$

где $A(\bullet)$ – оператор системы (функция преобразования информации, выполняемая системой);

ρ – некоторый функционал, например, время t , частота f (при частотном представлении используют также круговую частоту $\omega = 2\pi f$ [1]; оператор Лапласа $p = a + j\omega$ [1,2]), координата d (расстояние, пространственное положение) и т.д.

По наличию данных об операторе $A(\bullet)$ системы разделяют на:

1. Система типа “черный ящик” – оператор $A(\bullet)$ полностью неизвестен и восстанавливается в процессе проектирования экспериментальным путем за счет обработки векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.
2. Система типа “серый ящик” – $A(\bullet)$ известен частично, напри-

мер, с точностью до параметров \vec{q} , т.е. известно аналитическое выражение $A = f(\vec{q})$, а параметры \vec{q} неизвестны.

3. Система типа “белый ящик” – известен вид $A(\bullet)$ и значения параметров \vec{q} .

По типу оператора $A(\bullet)$ системы разделяют по совокупности их свойств, таких как:

- физическая реализуемость;
- стохастичность;
- векторность;
- линейность;
- инерционность;
- стационарность;
- распределенность;
- автономность и др.

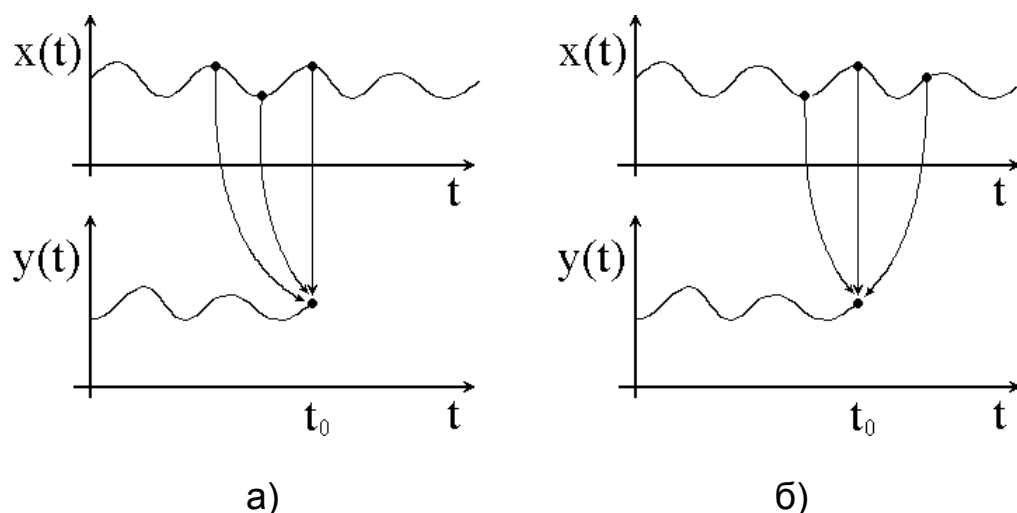


Рис. 1.2. Формирование выходного сигнала

В физически реализуемых системах выходная реакция системы формируется по предыдущим и текущему значениям входного воздействия (рис. 1.2-а). В физически нереализуемых системах для определения выходной реакции системы в текущий момент времени требуется знание будущих значений входного сигнала (рис. 1.2-б).

Для детерминированных систем существует однозначное соответствие между входным и выходным сигналом $y = A(\vec{x})$. В вероятностных (стохастических) системах значение выходного сигнала

может быть предсказано по значению входного только с некоторой определенной вероятностью $P(\vec{y} / \vec{x}) = f(A(\vec{x}))$. Причинами этой неопределенности могут быть:

- изменение внутренних параметров \vec{q} по случайному закону;
- случайные изменения структуры системы (например, внезапный отказ), что эквивалентно случайному изменению оператора системы $A(\bullet)$;
- влияние внешних факторов случайного характера \vec{z} .

Различают также одномерные (скалярные) и многомерные (векторные) системы. В одномерных системах входной процесс $x(t)$ и выходной процесс $y(t)$ – скалярные величины: $y = A(x)$. Систему считают многомерной, если хотя бы один из процессов $\vec{x}(t)$, $\vec{y}(t)$ является векторным. Система может быть векторной по входу, на-

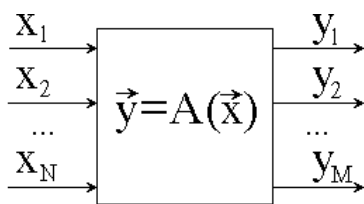


Рис. 1.3. Многомерная система

пример, $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$, по выходу, например, $y_1(t) = a \cdot x(t)$, $y_2(t) = b \cdot x(t)$, либо иметь много входов и выходов, каким-либо образом связанных друг с другом (рис.1.3).

Линейные системы, в отличие от нелинейных, подчиняются принципу суперпозиции:

$$y = A \left\{ \sum_k (a_k \cdot x_k) \right\} = \sum_k (a_k \cdot A\{x_k\}). \quad (1.2)$$

У безынерционных (статических) систем выходной сигнал в некоторый момент времени зависит только от значения входных сигналов в тот же момент времени. Инерционные (динамические) системы обладают "памятью о прошлом": значение выходного сигнала в некоторый момент времени зависит от значений входного сигнала в тот же момент и от значений входного и выходного сигнала в предшествующие моменты времени.

В стационарных (инвариантных) системах сдвиг входного сигнала во времени приводит к такому же сдвигу выходного сигнала $x(t + \tau) \rightarrow y(t + \tau)$, в то время как в нестационарных системах выходной сигнал зависит от момента подачи входного сигнала, т.е.

$$A = A(\bullet, t).$$

В системах с распределенными параметрами реакция системы зависит не только от времени, но и от координат. Такая система описывается дифференциальными уравнениями в частных производных по времени и пространству. Системы с сосредоточенными параметрами описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, и их реакция зависит только от времени.

Автономными называют системы, у которых отсутствует входное воздействие: $x(t) \equiv 0$, $y(t) = A(\vec{q}, \vec{z})$. Примером такой системы может служить генератор сигналов. В неавтономных системах реакция системы определяется не только внутренним состоянием, но и входным сигналом: $y(t) = A(\vec{q}, x(t))$.

1.3 Роль математического моделирования в процессе проектирования электронных аппаратов и систем

Моделирование – процесс познания объективной действительности, при котором изучаемый объект (оригинал) сознательно заменяется другим объектом (моделью), который находится в отношении подобия к оригиналу. Степень соответствия модели реальным процессам, протекающим в моделируемой системе, называется адекватностью модели.

Процесс проектирования системы с использованием модели заключается в исследовании модели с последующим переносом полученных сведений на моделируемый объект.

В процессе проектирования применяются как материальные модели, например, пространственные (использующие геометрическое подобие модели оригиналу) или физические (основанные на подобии физических принципов модели и оригинала), так и абстрактные модели – знаковые, аналитические, имитационные, вероятностные и др.

Знаковые модели обычно представляют собой чертежи и схемы проектируемого изделия, например, схемы электрические принципиальные.

Аналитические модели строятся на основе некоторой теории,

обязательно используются математические конструкции (функции) и служат основой для расчетных моделей.

Конечный результат математического моделирования – формальные соотношения для количественного или качественного анализа или машинного моделирования;

Имитационные модели в основе имеют алгоритм, имитирующий поведение объекта. Алгоритм может быть построен на базе либо аналитических моделей, либо знаковых (структурных схем, графов, топологических моделей).

Вероятностные модели применяются в следующих случаях:

- если внешние воздействия являются случайными;
- имеются субъективные факторы, связанные с участием человека;
- при моделировании факторов технологических процессов, обладающих разбросом параметров;
- при наличии необратимых процессов (старение, износ) или обратимых процессов, таких как разрегулирование, наводки, помехи.

Одним из главных элементов конструкторско-технологического проектирования радиоэлектронных средств является проведение расчетов, при выполнении которых используются математические модели физических процессов, протекающих в проектируемом изделии. Такие модели называются расчетными. Классификация расчетных моделей приведена на рис. 1.4.

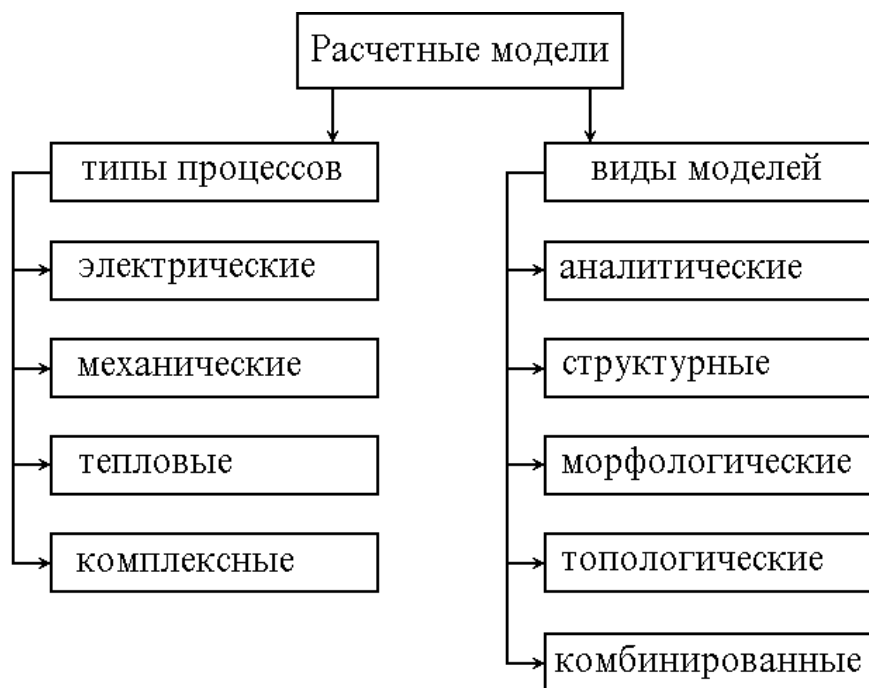


Рис. 1.4. Классификация расчетных моделей

Расчетные электрические модели:

- позволяют полностью или частично описать электрические процессы, протекающие в схеме при ее функционировании;
- дают возможность получить с заданной точностью электрические характеристики моделируемого объекта, как режимные, так и функциональные;
- должны учитывать паразитные проводимости, емкости, индуктивности и др. параметры, отражающие влияние конструкции на протекающие электрические процессы;
- должны учитывать электрические наводки от других электронных средств, окружающих объектов и среды.

Расчетные модели механических систем:

- позволяют полностью или частично отражать механические процессы в конструкции, связанные с появлением механических деформаций при внешних воздействиях;
- обеспечивают получение с заданной точностью необходимых механических характеристик аппаратуры (частотные характеристики для вибраций, временные характеристики для ударных воздействий, статические – для линейных ускорений и т.д.);
- должны учитывать распределенность массы несущей конст-

рукции и анизотропность механических свойств деталей конструкции, отражать эффекты внутреннего трения в деталях при их деформациях;

- должны учитывать реальную конечную жесткость крепления радиоэлементов к несущим конструкциям (печатным платам).

Тепловые расчетные модели:

- описывают процессы переноса тепла, связанные с теплообменом в конструкции под влиянием внешней среды;
- позволяют рассчитывать процессы тепловыделения в радиоэлементах, тепловое сопротивление при передаче тепла в окружающую среду, действие систем охлаждения и термостатирования;
- учитывают различные механизмы теплопереноса, такие как кондукция, конвекция и излучение;
- должны отражать распределенность массы конструкции как тепловой емкости и анизотропность тепловых свойств радиодеталей.

В соответствии с требованиями системного подхода к проектированию математические модели ЭА должны описывать полный комплекс физических процессов, происходящих как внутри аппаратуры, так и вне нее, как электрических, так и механических, тепловых и т.д. При этом в качестве входных воздействий \vec{x} (см. рис. 1.1) могут выступать электрические сигналы, электромагнитные помехи, механические вибрации и другие воздействия, непосредственно определяющие реакцию системы \vec{y} . Внешними воздействиями \vec{z} описывают множество внешних факторов, связанных с окружающей средой, так или иначе влияющих на работоспособность ЭА (например, температура окружающей среды, механические вибрации и удары, внешние электромагнитные поля и т.д.).

Состояние системы описывается при моделировании вектором параметров системы \vec{q} , который может включать как электрические параметры (сопротивление, коэффициент усиления, напряжения и токи), так и параметры системы, имеющие другую физическую природу (температура элементов системы, механические нагрузки на конструкцию и т.д.).

В связи с многообразием физических явлений, происходящих в электронных системах, зависимости их от времени, пространственного положения и т.д., в рамках данного учебного пособия все сигналы, воздействия, внешние факторы, а также реакция системы на них будут рассматриваться как некоторые физические процессы, описываемые едиными математическими моделями независимо от их физической природы.

Математические модели ЭА и электронных систем также можно рассматривать с единых методологических позиций независимо от физической сущности происходящих в системах процессов (электрических, тепловых, механических), поскольку они используют единый математический аппарат и единую методологию применения в процессе проектирования.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ И ВОЗДЕЙСТВИЙ

Все наблюдаемые процессы, характеризующие физические явления, можно разделить на детерминированные и недетерминированные (случайные). Детерминированными называют процессы (т.е. сигналы, воздействия, реакции систем), которые могут быть описаны математическими соотношениями. Значение детерминированного сигнала в любой момент времени можно определить точно. Процессы, описывающие детерминированные явления, могут быть периодическими и переходными. Промежуточное положение занимают т.н. почти периодические процессы, обладающие свойствами как периодических, так и переходных процессов (рис. 2.1).

Периодическими называют [3] процессы, которые могут быть описаны функцией времени, точно повторяющей свои значения через равные промежутки времени T_1

$$x(t) = x(t \pm k \cdot T_1), k = 1, 2, 3, \dots$$

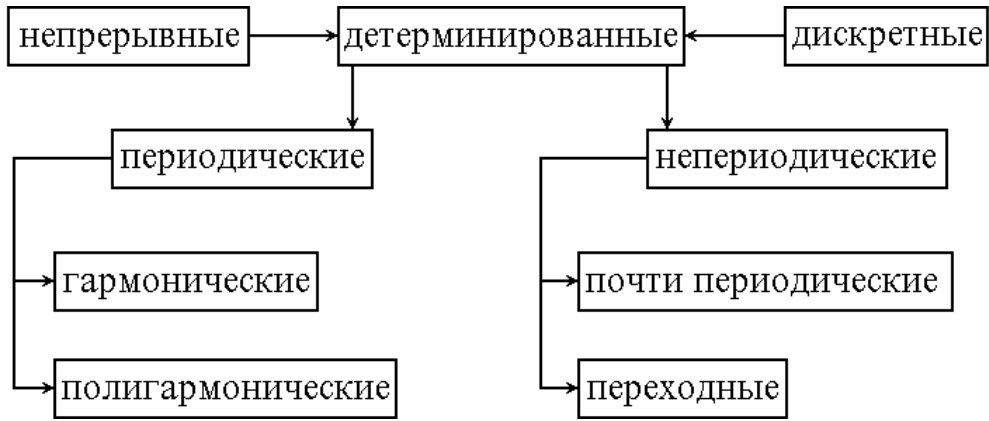


Рис. 2.1. Классификация детерминированных процессов

Интервал времени, за который происходит одно полное колебание, называется периодом процесса T_1 . Число повторений процесса (количество циклов) называется основной частотой процесса $f_1 = 1/T_1$.

2.1. Гармонические процессы

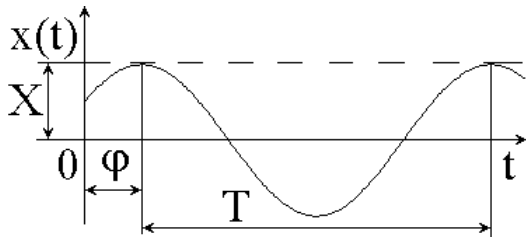


Рис. 2.2. Гармонический процесс

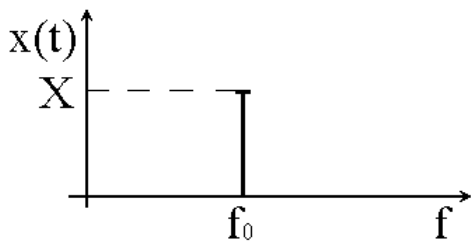


Рис. 2.3. Спектральное представление гармонического процесса

Гармоническими называются периодические процессы, которые могут быть описаны функцией времени:

$$x(t) = X \cos(2\pi f_0 t + \varphi), \quad (2.1)$$

где X – амплитуда; f_0 – частота; φ – начальная фаза (в радианах); $x(t)$ – значение функции в момент времени t . Гармонический процесс можно представить функцией времени, как показано на рис. 2.2, либо функцией частоты в т.н. спектральном представлении.

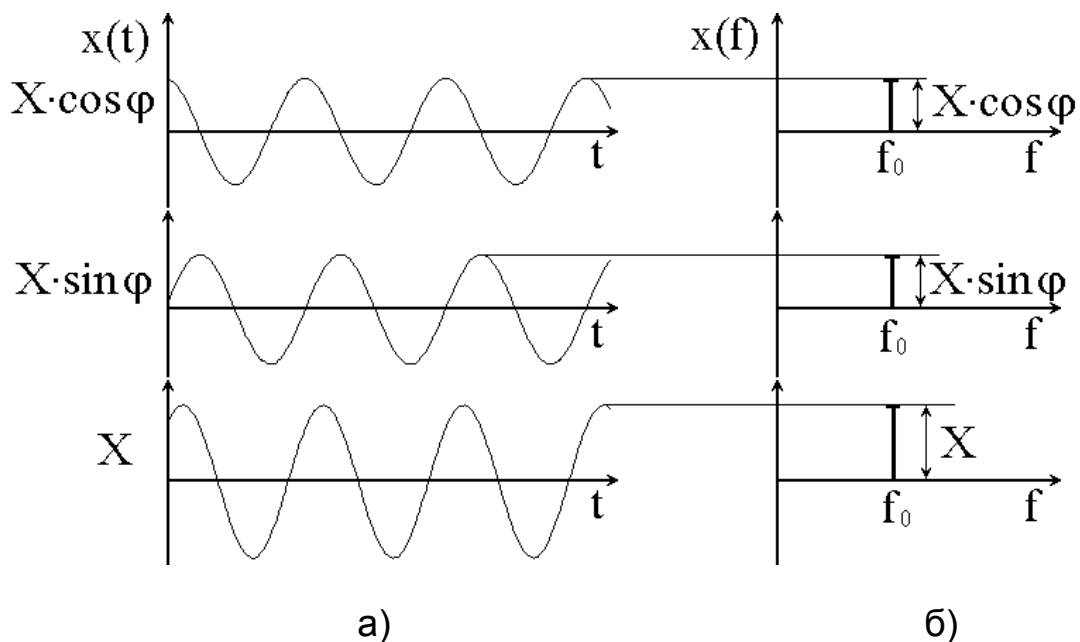
Частотный спектр (рис. 2.3) показывает, какова амплитуда X и частота f_0 периодического сигнала

ла. Частотное представление сигнала значительно удобнее его временного графика, однако, не содержит информации о начальной фазе колебания φ .

Известно, что любая синусоида может быть разложена на сумму двух так называемых квадратурных компонент [2]:

$$x(t) = X \cos(\omega_0 t + \varphi) = X \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(\varphi) + X \sin(\omega_0 t) \cdot \sin(\varphi), \quad (2.2)$$

где $\omega_0 = 2\pi \cdot f_0$. В этом случае для изображения гармонического процесса необходимо два графика (рис. 2.4-а) либо две спектральных диаграммы (рис. 2.4-б), которые полностью характеризуют все параметры процесса, однако не дают представления в явном виде об амплитуде и фазе процесса. Представление процессов в виде рис. 2.4 широко используется при компьютерном моделировании детерминированных сигналов и воздействий.



а) временное представление, б) частотное представление

Рис. 2.4. Представление гармонического процесса в виде суммы двух компонент

Более конструктивным является представление гармонического процесса с помощью комплексных векторов. Согласно теореме Эйлера [2]

$$\cos \alpha + j \sin \alpha = e^{j\alpha},$$

где $j = \sqrt{-1}$, любой гармонический процесс может быть представлен в комплексной форме

$$\dot{x}(t) = X e^{j(\omega t + \varphi)} = X_R \cos \omega t + j X_I \sin \omega t \quad (2.3)$$

или $\dot{x}(t) = X_R(t) + j X_I(t)$,

где $X_R = X \cos \varphi$ – реальная часть комплексного числа (2.3)

$X_I = X \sin \varphi$ – мнимая его часть, причем

$$X = \sqrt{X_R^2 + X_I^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{X_I}{X_R} \right). \quad (2.4)$$

Очевидно, что представление гармонического сигнала в виде комплексного числа принципиально ничем не отличается от разложения (2.2) (см. рис. 2.4), но позволяет определить понятие комплексного спектра, состоящего из двух диаграмм – амплитудного спектра, характеризующего амплитуду процесса на данной частоте, и фазового (рис.2.5).

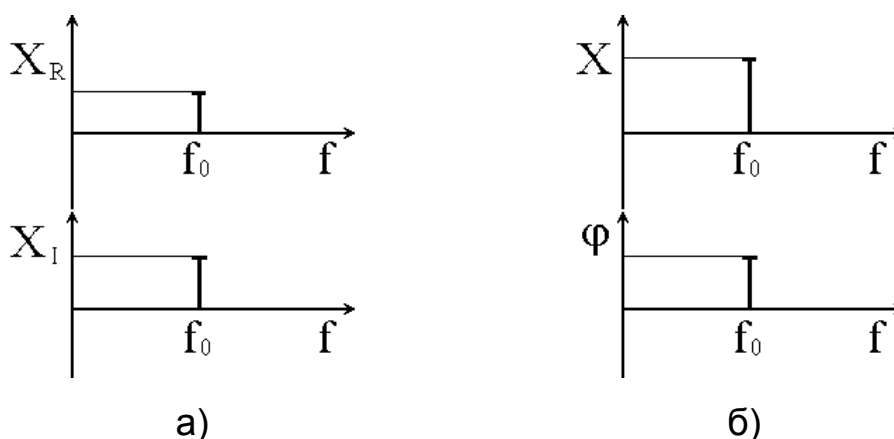


Рис. 2.5. Представление процесса в виде комплексного спектра:
 а) реальная и мнимая часть процесса,
 б) амплитудный и фазовый спектры

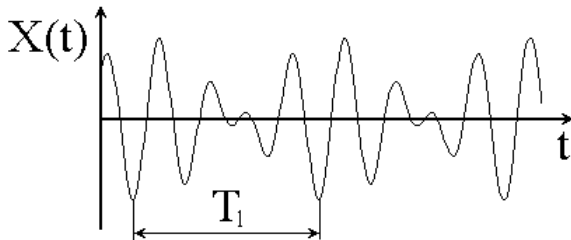
Таким образом, любой гармонический сигнал может быть представлен в виде суммы двух гармонических составляющих $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ с одинаковой частотой ω и амплитудами X_R и X_I , которые однозначно определяют амплитуду и начальную фазу гармонического процесса по (2.4).

2.2. Полигармонические процессы

Полигармонический процесс может быть представлен в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^n X_k \cdot \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t + \varphi_k), \quad (2.5)$$

где $\omega_1 = 2\pi \cdot f_1$, f_1 – основная частота.



В общем случае $n \rightarrow \infty$.

Очевидно, что гармонический процесс является частным случаем полигармонического процесса; при $n = 1$, $f_1 = f_0$.

Рис. 2.6. Полигармонический процесс $x(t)$ может быть представлен в виде суммы квадратурных компонент

$$x(t) = \frac{X_0}{2} + \sum_{k=1}^n (X_{Rk} \cdot \cos(k\omega_1 t) + X_{Ik} \cdot \sin(k\omega_1 t)). \quad (2.6)$$

Выражение (2.6) называют рядом Фурье [2], причем

$$X_{Rk} = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} x(t) \cos(k\omega_1 t) dt, \quad k = 0 \dots \infty,$$

$$X_{Ik} = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} x(t) \sin(k\omega_1 t) dt, \quad k = 0 \dots \infty.$$

В комплексной форме полигармонический процесс может быть представлен как

$$X(t) = X_0 + \sum_{k=1}^n X_k e^{j \cdot (k\omega_1 t + \varphi_k)}, \quad (2.7)$$

где $X_k = \sqrt{X_{Rk}^2 + X_{Ik}^2}$, $\varphi_k = \arctg \frac{X_{Ik}}{X_{Rk}}$.

Возможен и другой способ записи ряда Фурье для полигармонического процесса:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k).$$

Очевидно, что полигармонический процесс состоит из постоянной составляющей X_0 и, в общем случае, бесконечного числа синусоидальных компонент, называемых гармониками (или гармоническими составляющими) с амплитудами X_k и начальными фазами φ_k , причем, частоты всех гармоник кратны основной частоте процесса f_1 (рис. 2.7)

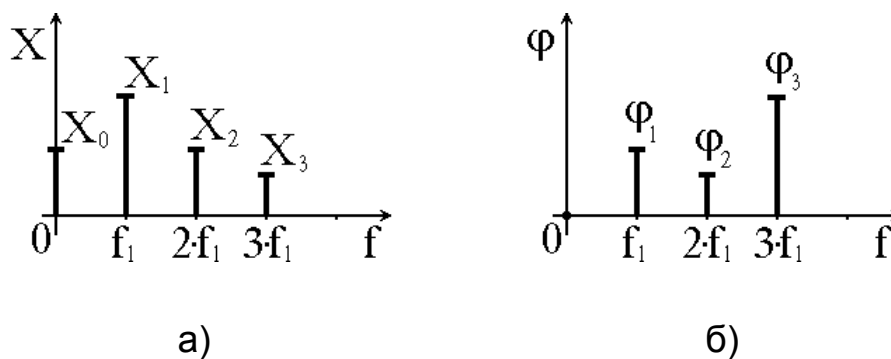


Рис. 2.7. Комплексный спектр полигармонического процесса

Иногда компонента с основной частотой в спектре полигармонического процесса может отсутствовать. Например, периодический процесс формируется в результате смешения трех синусоид с частотами 60, 75 и 100 Гц. Наибольший общий делитель этих трех чисел равен 5 Гц, поэтому основная частота полигармонического процесса будет 5 Гц, а период результирующего процесса:

$$T_1 = 1/f_1 = 1/5 \text{ Гц} = 0,2 \text{ сек.}$$

Следовательно, при разложении в ряд Фурье все значения x_k будут равны нулю, кроме $k = 12, 15, 20$ (см. рис 2.8).

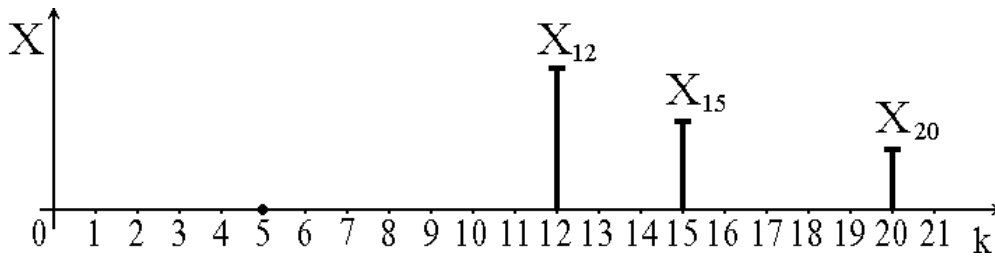


Рис. 2.8. Спектр полигармонического процесса без основной частоты

2.3. Почти периодические процессы

Как было рассмотрено выше, процесс, образованный суммированием двух или более синусоид с кратными частотами, является периодическим. Однако, если процесс образуется суммированием двух и более синусоид с произвольными частотами, то он будет периодическим только в том случае, если отношения всех возможных пар частот представляют собой рациональные числа. Например, процесс $x(t) = X_1 \sin(2t + \varphi_1) + X_2 \sin(3t + \varphi_2) + X_3(7t + \varphi_3)$ – периодический, т.к. $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ – рациональные числа с основным периодом, равным единице. А процесс $x(t) = X_1 \sin(2t + \varphi_1) + X_2 \sin(3t + \varphi_2) + X_3(\sqrt{50}t + \varphi_3)$ не будет периодическим, поскольку числа $\frac{2}{\sqrt{50}}$ и $\frac{3}{\sqrt{50}}$ – иррациональные, и основной период процесса равен бесконечности. Такие процессы называют почти периодическими и описывают функцией времени

$$x(t) = \sum_{k=0}^n X_k \cdot \cos(\omega_k t + \varphi_k),$$

где не все отношения $\frac{f_k}{f_j}$ являются рациональными числами.

Физические явления, которым соответствуют почти периодические процессы, образуются, как правило, при суммировании двух или более независимых гармонических процессов. Примерами почти периодических процессов могут служить вибрации самолета с

несколькими моторами или вибрации радиоаппаратуры, обдув (охлаждение) которой осуществляется несколькими вентиляторами, работающими со своими частотами.

Для описания почти периодических процессов используются те же математические модели, что и для полигармонических, однако отсутствие периодичности создает ряд проблем при цифровой обработке данного типа процессов, поскольку большинство методов обработки разрабатывались для периодических сигналов.

2.4. Переходные процессы

К переходным относятся все непериодические процессы, не являющиеся почти периодическими. Важное отличие переходных процессов от периодических и почти периодических заключается в том, что их невозможно представить с помощью спектра, состоящего из дискретных компонент.

Рассмотрим процесс $x(t)$, представляющий собой периодическую последовательность импульсов $x_1(t)$ произвольной формы с периодом T

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t - n \cdot T).$$

Коэффициенты C_k преобразования Фурье от $x(t)$ равны

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-jk\omega_1 t} dt.$$

Учитывая, что $x(t)$ на интервале $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ представлен одиночным импульсом $x_1(t)$, а за пределами этого интервала $x_1(t) = 0$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot e^{-jk\omega_1 t} dt \quad (2.8)$$

При $T = const$ коэффициенты C_k зависят только от интеграла:

$$x_1(k\omega_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (2.9)$$

Комплексная функция $x_1(k\omega_1)$ является спектральной характеристикой одиночного импульса $x_1(t)$. Сравнивая (2.8) и (2.9), получим

$$C_k = \frac{x_1(k\omega_1)}{T}.$$

Пределы интегрирования в (2.9) являются бесконечными, что можно трактовать как разложение в ряд одиночного импульса на бесконечном интервале времени.

Следовательно, $x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_1 t}$ при $T \rightarrow \infty$, т.е.

$$x_1(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_1 t} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{x_1(k\omega_1)}{T} e^{jk\omega_1 t}.$$

Поскольку $T = 2\pi/\omega_1$

$$x_1(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k\omega_1) e^{jk\omega_1 t} \omega_1.$$

При $T \rightarrow \infty$ $\omega_1 = 2\pi/T \rightarrow 0$. Тогда приращение частоты при переходе к соседней гармонике в сумме можно заменить дифференциалом $d\omega$, а частоты гармоник принимают при этом дискретные, но бесконечно близкие значения. Обозначим $\omega = k\omega_1$, при этом суммирование переходит в интегрирование:

$$X_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Полученные формулы являются прямым и обратным преобразованиями Фурье и описывают непрерывный сигнал $x_1(t)$, заданный на интервале $t \in [-\infty, \infty]$, соответственно, в частотной и временной

форме.

Доказано, что интегральное преобразование Фурье существует не для всех сигналов, а только для т.н. абсолютно интегрируемых:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

Функция $X(\omega)$ характеризует спектральный состав сигнала $x(t)$ и называется спектральной плотностью сигнала $x(t)$. Такое название обусловлено тем, что для непериодического сигнала $x(t)$ (при $T \rightarrow \infty$) частотный интервал между соседними гармоническими составляющими стремится к нулю. Т.е., в отличие от периодических сигналов, непериодические имеют сплошной спектр.

Примеры типичных переходных процессов и их спектральных плотностей представлены на рис. 2.9...2.11.

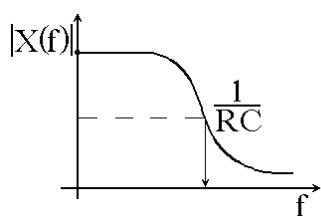
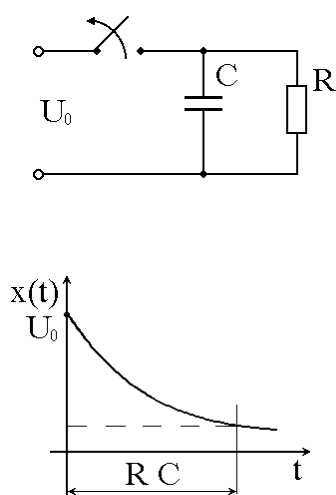


Рис. 2.9 Переходной процесс разряда конденсатора при размыкании ключа

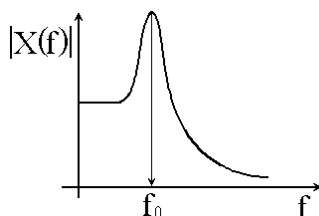
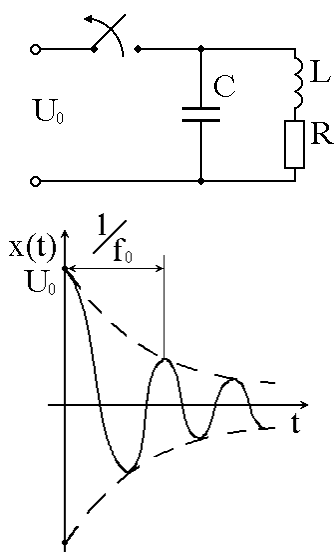


Рис. 2.10 Переходной процесс в колебательном контуре при размыкании ключа

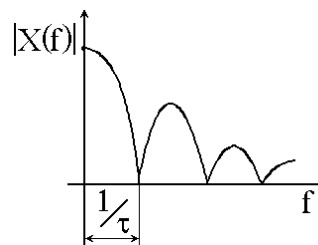
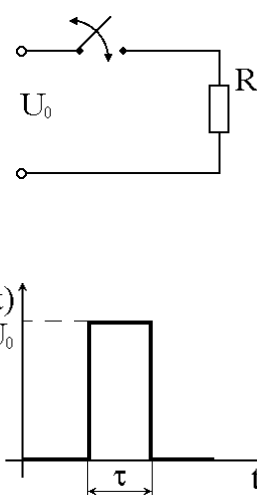


Рис. 2.11 Переходной процесс на активной нагрузке при кратковременном замыкании ключа

3. ДИСКРЕТНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

3.1. Дискретизация процессов

Процессы, значения которых изменяются непрерывно при изменении непрерывной переменной (время, пространство), называются непрерывными. Непрерывные процессы часто называют также аналоговыми или континуальными. Дискретизация процессов состоит в замене “непрерывных значений” дискретными отсчетами и может быть осуществлена по времени (пространству), по уровню или по времени и уровню одновременно (см. рис. 3.1).

Дискретизация	Непрерывное время	Дискретное время
Непрерывный уровень		
Дискретный уровень		

Рис. 3.1. Виды дискретизации процессов

Дискретизация процесса по времени соответствует выделению значений процесса в фиксированные моменты времени t_k , $k = 0 \dots N$. Интервал времени между отсчетами Δt называют обычно интервалом дискретизации или шагом дискретизации. При этом функция $U(t)$ заменяется отсчетами функции в дискретные моменты времени, т.е. осуществляется переход от непрерывного времени к дискретному

$$U_k = U(t_k) = U(k \cdot \Delta t); \quad k = 0 \dots N.$$

Такой процесс называют дискретным [3].

Дискретизация процессов по уровню, которая чаще называется квантованием по уровню, соответствует выделению значений процесса при достижении им заранее определенных фиксированных значений, которые обычно отстоят друг от друга на постоянную величину ΔU , называемую шагом квантования по уровню. При квантовании непрерывное значение функции $U(t)$ заменяется целочисленным кодом n :

$$U(t) = n \cdot \Delta U.$$

Процессы, дискретизованные как по времени, так и по уровню, называются цифровыми [3].

Значения отсчетов в цифровых процессах являются, как правило, целыми числами, взятыми в дискретные моменты времени и лишь приближенно описывают поведение модифицированной функции:

$$U(t_k) \cong n_k \cdot \Delta U.$$

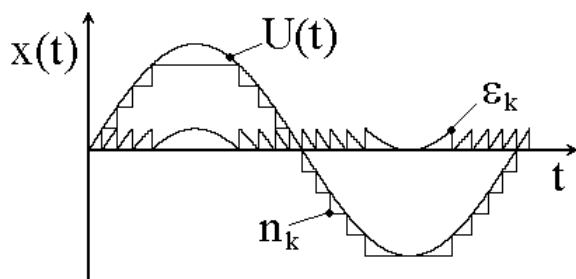


Рис. 3.2. Шум квантования

Разность между точными значениями функции и ее цифровыми значениями

$$\varepsilon_k = U(t_k) - n_k \cdot \Delta U, \\ k = 1 \dots N$$

называют шумом квантования (рис. 3.2).

Для формирования цифровых сигналов применяют устройства “аналого-цифровые преобразователи” (АЦП). Цифровые сигналы находят все большее применение при решении самых различных технических задач, в т.ч. и при моделировании процессов и систем. При компьютерном моделировании сигналы всегда являются цифровыми, хотя в ряде случаев с приемлемой для практики точностью их можно считать только дискретными (при использовании при моделировании на ЭВМ реальных чисел высокой разрядности $\varepsilon_k \rightarrow 0$).

3.2. Преобразование спектра при дискретизации процессов

Дискретный сигнал x_k на выходе АЦП можно представить в виде произведения исходного процесса $x(t)$ и дискретизирующей последовательности импульсов $p(t)$

$$x_k = x_d(t) = x(t) \cdot p(t).$$

Дискретизирующая последовательность $p(t)$ может быть представлена через δ -функцию как

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \cdot \Delta t),$$

где k – номер отсчета, Δt – интервал дискретизации.

Разложим $p(t)$ в комплексный ряд Фурье:

$$p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \cdot e^{-jm \cdot 2\pi / \Delta t}.$$

Коэффициенты разложения c_m определяются из соотношения

$$c_m = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \delta(t) \cdot e^{-jm \cdot 2\pi / \Delta t} dt = \frac{1}{\Delta t}.$$

Тогда дискретный сигнал

$$x_d(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta t} x(t) \cdot e^{jm \cdot 2\pi / \Delta t}.$$

Умножение сигнала $x(t)$ на $\exp\left(jm \cdot \frac{2\pi}{\Delta t} \cdot t\right)$ соответствует сдвигу

спектра функции на $m \cdot \frac{2\pi}{\Delta t}$, поэтому

$$X_d(\omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - m \frac{2\pi}{\Delta t}\right), \quad (3.1)$$

где $X(\omega)$ – спектральная плотность исходного (аналогового) сигнала.

Таким образом, с математической точки зрения спектральная

плотность дискретного сигнала $X_d(\omega)$ равна сумме спектральных плотностей $X(\omega)$ аналогового сигнала, сдвинутых на величину $m \cdot 2\pi/\Delta t$, т.е., теоретически, спектр дискретного сигнала представляет собой сумму сдвинутых копий спектра исходного сигнала, при этом шаг сдвига равен частоте дискретизации $f_d = 1/\Delta t$.

С физической точки зрения существование таких сигналов невозможно, поскольку сигнал с такой спектральной плотностью должен обладать бесконечно большой энергией. На практике периодичность спектра (3.1) означает, что при дискретизации процессов, изменяющихся с частотой выше частоты дискретизации (например, $m = 2$ на рис. 3.3), будет получен такой же дискретный сигнал, как при дискретизации процесса со спектром при $m = 0$ или при $m = 3$ за счет суммирования соседних членов ряда в (3.1).

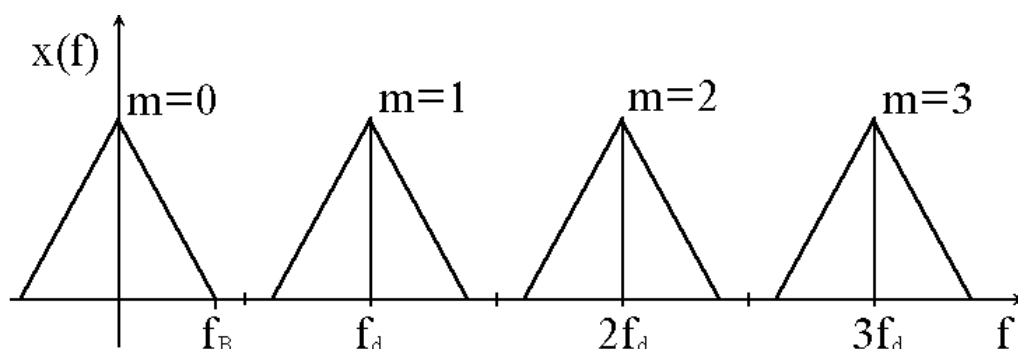


Рис. 3.3. Периодическое продолжение спектра дискретного сигнала

Если верхняя граничная частота спектра исходного процесса f_B меньше половины частоты дискретизации, т.е. $f_B < f_d/2$, то сдвинутые копии спектра не будут перекрываться. В противном случае возникает наложение спектральных составляющих, за счет чего становится невозможным восстановление формы исходного процесса.

Условия, при которых непрерывный сигнал может быть однозначно восстановлен по своим дискретным отсчетам, определяются

теоремой Котельникова [1,3], согласно которой сигнал $x(t)$, спектральная плотность которого не содержит составляющих с частотами выше f_B , полностью определяется своими отсчетами, взятыми в дискретные моменты времени через интервал $\Delta t = 1/2f_B$, и может быть однозначно восстановлен по своим отсчетам как

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin \omega_B(t - k\Delta t)}{\omega_B(t - k\Delta t)}, \quad (3.2)$$

где $x(k\Delta t)$ – отсчеты непрерывного сигнала в моменты времени $t_k = k\Delta t$, $\omega_B = 2\pi f_B \cdot t_k$.

Данное выражение можно интерпретировать как разложение функции $x(t)$ в ряд ортогональных базисных функций вида

$$\varphi(t - k\Delta t) = \frac{\sin \omega_B(t - k\Delta t)}{\omega_B(t - k\Delta t)}.$$

Коэффициенты этого разложения равны значениям восстанавливаемого сигнала в точках дискретизации.

В точках $t = k\Delta t$ сигнал $x(t)$ восстанавливается точно, так как $x(t)$ согласно (3.2) определяется лишь одним слагаемым ряда, а все остальные члены ряда в этих точках имеют нулевые значения. Между отсчетами $t \neq k\Delta t$ сигнал $x(t)$ восстанавливается точно только в том случае, если суммируется все бесконечное количество членов ряда (3.2).

Если время наблюдения процесса T ограничено, то мы имеем N отсчетов $N = T/\Delta t$, и, следовательно, восстановление сигнала всегда происходит с некоторой погрешностью [6]

$$\varepsilon \approx \frac{1}{\sqrt{f_B T}} = \sqrt{\frac{2}{N}}.$$

3.3. Ортогональные преобразования при обработке и моделировании сигналов

Два сигнала $x(t)$ и $y(t)$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t) dt = 0.$$

Система функций $\{x_0, x_1, \dots, x_n(t)\}$, ортогональных друг другу в произвольных комбинациях, образуют базис ортогональных функций.

Если данные функции обладают единичными нормами, т.е.

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) \cdot x_j(t) dt = 1, \text{ при } i = j \\ \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) \cdot x_j(t) dt = 0, \text{ при } i \neq j, \end{cases}$$

то такой ортогональный базис называется ортонормированным. Разложение произвольного сигнала $s(t)$ в ряд ортонормированных функций

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \cdot x_i(t)$$

называется обобщенным рядом Фурье сигнала $s(t)$ в базисе ортонормированных функций $\{x_k(t)\}$.

Коэффициенты разложения C_k в ряд определяется как [1,2]

$$C_k = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot x_k(t) dt.$$

Возможность представления сигналов рядом ортонормированных функций позволяет заменить разложение на бесконечном множестве функций на разложение с ограниченным количеством членов ряда путем правильного выбора ортонормированного базиса.

Основные типы базисов, применяемые к дискретным сигналам

и соответствующие типы преобразований [1]:

- система гармонических функций – преобразование Фурье;
- система функций Уолша $\pm 1(t)$ – преобразования Уолша (см. рис. 3.4);
- система экспоненциальных функций $e^{(\alpha+j\omega)t} = e^{pt}$ – преобразование Лапласа;
- система дискретных экспоненциальных функций $Z = e^{p\Delta t}$ – Z -преобразование.

3.3.1 Преобразование Фурье

Преобразование Фурье представляет собой разложение периодического процесса $x(t)$ в ряд ортонормированных функций $\cos(k\omega t)$, $\sin(k\omega t)$, $k = 0 \dots \infty$:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega_1 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_1 t). \quad (3.3)$$

Возможно разложение $x(t)$ и по базису комплексных экспонент $e^{jk\omega_1 t}$.

Согласно формулам Эйлера [2]

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}; \quad \sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}.$$

Тогда (3.3) может быть представлено в виде

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2} + b_k \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j}.$$

Введем обозначения:

$$\frac{a_k - jb_k}{2} = C_k \text{ при } k > 0, \quad C_{-k} = \frac{(a_k + jb_k)}{2} \text{ при } k < 0 \text{ и } C_0 = \frac{a_0}{2} = X_0.$$

Тогда

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_1 t} \quad (3.4)$$

представляет собой комплексный ряд Фурье, коэффициенты которого

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-jk\omega t} dt \quad (3.5)$$

имеют комплексные значения.

Если C_k представить в экспоненциальной форме $C_k = A_k e^{j\varphi_k}$ и $C_{-k} = A_k e^{-j\varphi_k}$, то очевидно, что $C_k^* = C_{-k}$ (* – знак комплексного сопряжения) и пара слагаемых

$$A_k \cdot e^{j(k\omega_1 t + \varphi_k)} + A_k \cdot e^{-j(k\omega_1 t + \varphi_k)} = 2 \cdot A_k \cdot \cos(k\omega_1 t + \varphi_k).$$

Таким образом, пара преобразований (3.4), (3.5) представляют собой прямое и обратное преобразования Фурье для непрерывных сигналов.

3.3.2. Дискретное и быстрое преобразование Фурье

Преобразование Фурье применимо не только к непрерывным, но и к дискретным сигналам [3].

Если сигнал $x(t)$ представлен выборкой отсчетов объемом N x_k , $k = 1 \dots N$, то прямое дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

$$X_m = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j2\pi mk/N}, m = 0 \dots N-1 \quad (3.6)$$

представляет собой спектр X_m дискретного сигнала x_k и является периодическим, т.е. $x_m = x_{m+N}$

Обратное дискретное преобразование Фурье

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{j2\pi mk/N}, k = 0 \dots N-1$$

восстанавливает дискретный сигнал x_k по его спектру X_m .

В соответствии с (3.6) для вычисления N значений спектральных отсчетов X_m требуется выполнить примерно N^2 умножений и

N^2 сложений. С ростом N время вычислений резко возрастает. Для ускорения вычислений разработаны алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Идея алгоритма БПФ [3,6] основана на использовании выборки объемом $N = 2^n$, где n – целое (2,4,8,16,32,64,128,256,512...).

Последовательность x_n объемом N разбивают на две подпоследовательности объемом $N/2$ и находят для них спектры отдельно, а затем по ним определяют N -точечное дискретное преобразование Фурье. При этом количество операций сокращается до $N^2/2$. Если продолжить разбиение и каждую подпоследовательность разбить еще на две цепочки, то время вычислений еще более сократится. При этом используется т.н. прореживание по времени – соседние отсчеты x_n обрабатываются в разных подпоследовательностях. Количество операций умножения – сложения равняется $2 \log_2 N$, что при больших N значительно меньше чем N^2 . В формуле (3.6) предполагается, что N отсчетам реализации соответствует N значений частот, отстоящих друг от друга на величину $1/T$. При этом частоте дискретизации соответствует точка $m = N/2$. Поэтому при использовании БПФ $X(m)$ получаются для точек $m = 0 \dots N/2 - 1$, а остальные $N/2 \dots N - 1$ – их зеркальные комплексные сопряжения.

Свойства преобразования Фурье, используемые при моделировании сигналов и воздействий:

1. Свойство линейности – спектральная плотность линейной комбинации нескольких сигналов $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ является линейной комбинацией спектральных плотностей $X(\omega) = a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$.
2. Свойство запаздывания – преобразование Фурье сигнала $x(t)$,

задержанного на время τ , $x(t - \tau) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega\tau}$ равно спектру незадержанного сигнала, сдвинутому по фазе на приращение $\omega\tau$, линейно зависящее от частоты.

3. Свойство масштабирования – преобразование Фурье сигнала $x(t)$ при изменении масштаба времени в k раз $x(kt) \leftrightarrow X(\omega/k)$; например, “сжатие” сигнала во времени в $k > 1$ раз приводит к “растяжению” спектра по оси частот в k раз.

4. Спектральная плотность производной $\frac{\partial x(t)}{\partial t} = x'(t) \leftrightarrow j\omega X(\omega)$.

5. Спектральная плотность интеграла $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega}$.

6. Преобразование Фурье произведения сигналов

$$x(t) \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\xi) \cdot U(\xi - \omega) d\xi,$$

т.е. произведению сигналов во временной области соответствует свертка спектральных плотностей сигналов в частотной области.

7. Преобразование Фурье свертки сигналов во времени

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \cdot u(\tau) d\tau \leftrightarrow X(\omega) \cdot U(\omega)$$

соответствует произведению спектральных плотностей исходных сигналов.

3.3.3. Преобразование Уолша – Адамара

При обработке дискретных цифровых сигналов широко применяется преобразование Уолша, основанное на ортонормированной системе функций Уолша, которые на интервале времени наблюдения T принимают значения ± 1 (рис. 3.4).

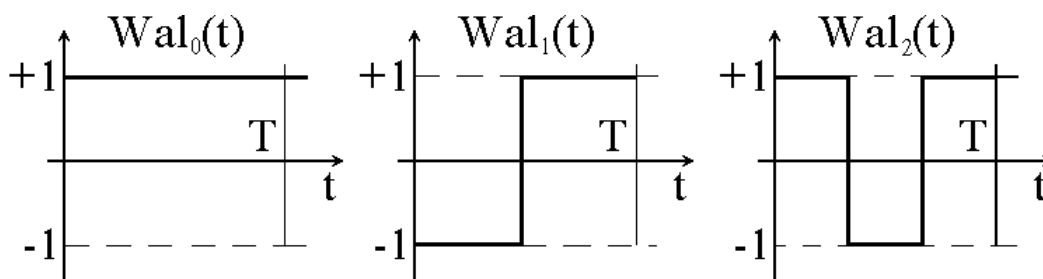


Рис. 3.4. Система функций Уолша

Очевидно, что такая система функций является ортонормированной. Преобразование Уолша обладает свойствами, аналогичными свойствам преобразования Фурье.

Разложение в ряд Уолша имеет вид

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot Wal_k\left(\frac{t}{T}\right).$$

3.3.4. Дискретное преобразование Лапласа

В области комплексных переменных широко используется преобразование Лапласа. Для комплексной переменной $p = \alpha + j\omega$ устанавливается связь между функцией действительного переменного $x(t)$ и функцией комплексного переменного $X(p)$

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt,$$

называемая преобразованием Лапласа. В теории функций комплексного переменного $x(t)$ называется оригиналом, а $X(p)$ – изображением. Соотношение между ними записывается в виде

$$L(x(t)) = X(p) \text{ или } x(t) \leftrightarrow X(p).$$

При $\alpha = 0$ $p = j\omega$ преобразование Лапласа эквивалентно преобразованию Фурье.

Дискретное преобразование Лапласа применяется к дискретным последовательностям в соответствии с формулой

$$x(p) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot e^{-p \cdot k \cdot \Delta t} \quad (3.7)$$

и представляет собой разложение дискретного процесса в ряд комплексных экспонент.

Свойства преобразования Лапласа аналогичны свойствам преобразования Фурье.

3.3.5. Z-преобразование

Широко используется при цифровом моделировании и вытекает из преобразования Лапласа. Путем замены переменных в (3.7) $z = e^{p\Delta t}$ получим:

$$X(z) = Z\{x_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot z^{-n}. \quad (3.8)$$

Z-преобразование практически совпадает с дискретным преобразованием Лапласа и отличается только аргументом изображения. При такой замене трансцендентные функции от аргумента p преобразуются в рациональные функции от аргумента z , что упрощает анализ.

Отметим основные свойства z -преобразования:

1) Линейность – если $x_n = a_1 x_{1n} + a_2 x_{2n}$,

то $X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$.

2) Смещение сигнала – запаздывание на m тактов дискретизации по времени $Z\{x_{n-m}\} = z^{-m} \cdot Z(x_n)$, т.е. задержка сигнала во временной области на m тактов приводит к умножению его z -преобразования на множитель z^{-m} .

3) z -преобразование свертки двух дискретных сигналов равно произведению их z -преобразований:

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot h_{n-k}, \quad Z\{y_n\} = X(Z) \cdot H(Z).$$

4. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ И ВОЗДЕЙСТВИЙ

При разработке и проектировании электронных аппаратов и систем, а также технологических процессов их производства приходится учитывать случайный характер параметров комплектующих электрорадиоэлементов, конструктивных размеров, входных сигналов, внешних воздействий (климатических, биологических, радиационных и т.д.), субъективные факторы, связанные с участием человека - оператора (время реакции, неточность движений), наличие наводок и помех, а также необратимые процессы в ЭА (старение, износ, отказы). Причем в реальных условиях имеет место совместное воздействие всего множества факторов и их взаимное влияние (например, как параметры, так и скорость старения элементов ЭА зависят от температуры окружающей среды).

Моделирование случайных факторов, сигналов и воздействий основано на теории вероятностей, теории случайных функций и случайных процессов [4,5,7]. При этом вероятностные модели разделяют на

- дискретные и непрерывные;
- зависимые и независимые;
- случайные величины и случайные процессы;
- одномерные и многомерные (векторные).

4.1 Модели дискретных случайных величин

Допустим, N раз производится испытание, исходом которого могут быть M событий a_k , $k = 1, M$ ($N \gg M$). Для каждого события a_k подсчитывается, сколько раз произошло данное событие:

$a_k \rightarrow n_k$, $\sum_{k=1}^M n_k = N$. Очевидно, что n_k является функцией N . Отношение n_k/N называют относительной частотой появления события a_k . При $N \rightarrow \infty$ отношение $n_k/N \rightarrow P(a_k)$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_k}{N} = P(a_k)$, где

$P(a_k)$ – вероятность события a_k .

Вероятность события – это мера объективной возможности его появления [4]. Событие, которое обязательно должно произойти (либо уже произошло), называется достоверным. Вероятность такого события считают равной 1. Вероятность невозможного события принимают равной нулю. Таким образом, $0 \leq P(A) \leq 1$.

Дискретной случайной величиной (ДСВ) A называют случайную величину, единственно возможные значения которой являются дискретными величинами a_k , $k = 1, M$ (например, пульс – количество ударов сердца в минуту). Исчерпывающей характеристикой ДСВ является ее закон распределения, который задается

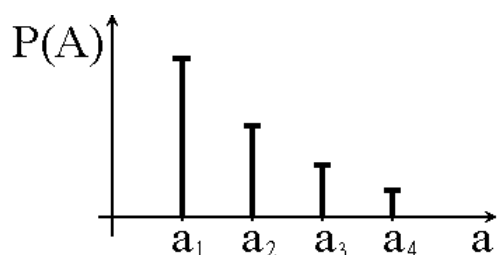


Рис. 4.1. Диаграмма закона распределения ДСВ

1) В виде таблицы

a_k	a_1	a_2	a_3	...
P_k	P_1	P_2	P_3	...

2) В виде диаграмм распределения (см. рис. 4.1)

3) Аналитически $P_k = P\{A = a_k\}$.

Необходимо отметить, что обязательным условием является

$$\sum_{k=0}^M P_k = 1.$$

Практически важными аналитическими моделями ДСВ являются биномиальный закон распределения и закон распределения Пуассона.

4.1.1. Биномиальный закон распределения

Допустим при N независимых испытаниях событие A наступает k раз. Событие A в каждом эксперименте может появиться не более одного раза и с вероятностью Q , таким образом случайная величина k может принимать значения $k = 1, 2, 3, \dots, N$. Вероятность того, что при N испытаниях событие A наступит ровно k раз:

$$p_k = C_N^k \cdot Q^k \cdot (1-Q)^{N-k},$$

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}.$$

Среднее значение для данного закона $m_k = \sum_{k=0}^N k \cdot p_k = NQ$, диспер-

сия $\sigma_k^2 = NQ \cdot (1-Q) = \sum_{k=0}^N k^2 p_k$.

Биноминальный закон описывает, например, количество отказов при испытаниях N изделий, отказывающих с вероятностью Q . Форма данного закона распределения существенно зависит от вероятности Q , рис. 4.2.

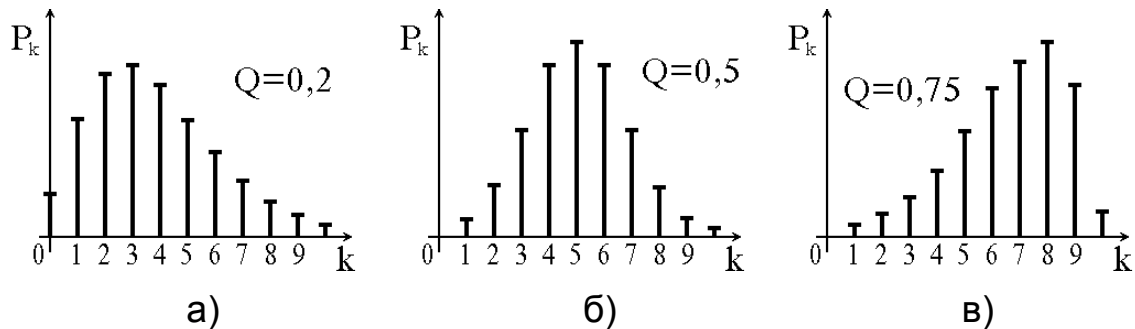


Рис. 4.2 Биномиальный закон распределения

4.1.2. Закон Пуассона

При $N \rightarrow \infty$ биномиальный закон распределения переходит в закон Пуассона. Если принять $N \cdot Q = a$, то $p_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$, где a – параметр закона – среднее значение количества событий, Q – вероятность одиночного события при N независимых испытаниях при $N \rightarrow \infty$. Закон Пуассона описывает целый ряд физико-технических явлений, имеющих импульсный характер, например:

- 1) количество разрядов молний в грозу (создают электромагнитные импульсные помехи работе ЭА);
- 2) количество отказов аппаратуры за некоторый промежуток времени;

- 3) ударные нагрузки при транспортировке аппаратуры;
- 4) количество телефонных звонков (в системах связи) и т.д.

Среднее значение m_k и дисперсия σ_k^2 для закона Пуассона равны a .

4.2 Модели непрерывных случайных величин

Случайные величины, возможные значения которых отличаются друг от друга на бесконечно малую величину, называются непрерывными случайными величинами (НСВ).

Модели факторов, сигналов, воздействий в виде непрерывных случайных величин используются, например, для описания:

- разброса параметров комплектующих радиоэлементов;
- входных сигналов и внешних воздействий;
- выходных реакций систем и т.д.

Если для описания ДСВ использовались распределения вероятностей, то для описания НСВ используются плотности распределения вероятностей.

Для НСВ x интервал между соседними возможными значениями стремится к нулю и вероятность значения x описывается плотностью распределения

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P \frac{[x' \leq x \leq x' + \Delta x]}{\Delta x} \quad (4.1)$$

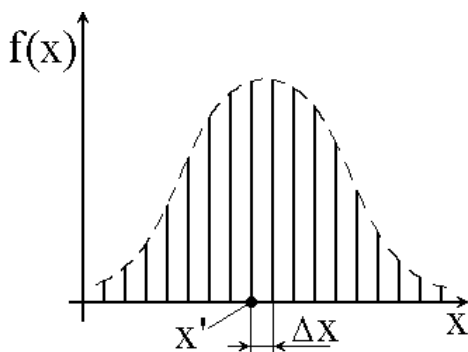


Рис. 4.3. К определению плотности распределения

Плотность распределения $f(x)$ всегда действительная неотрицательная функция. Поскольку полное множество значений x , в общем случае,

$$x \in [-\infty, \infty], \text{ то } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Вероятность того, что случайное значение x будет находиться в интервале Δx , определяется как

$$P_{\Delta x}(x \in [x', x' + \Delta x]) = \int_{x'}^{x'+\Delta x} f(x)dx.$$

Вероятность того, что значение x не превышает некоторого значения X

$$F(X) = P(x \leq X) = \int_{-\infty}^X f(x)dx \quad (4.2)$$

зависит от значения X и называется функцией распределения.

Для описания характера группирования НСВ широко используются такие числовые характеристики как моменты распределения k -го порядка – начальные m_k и центральные μ_k :

$$m_k = M_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)dx, \quad \mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^k \cdot f(x)dx,$$

где m_1 – первый начальный момент ($k = 1$) – математическое ожидание НСВ x :

$$m_1 = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx. \quad (4.3)$$

Второй начальный момент $m_2 = M_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx$ – среднее значение квадрата НСВ. Второй центральный момент – дисперсия НСВ

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x)dx \quad (4.4)$$

– характеризует разброс случайной величины относительно среднего значения. Для сопоставимости по единицам измерения с математическим ожиданием вместо дисперсии часто используется т.н. среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_x = \sqrt{\mu_2}. \quad (4.5)$$

Форму закона распределения характеризуют третий и четвертый центральные моменты. На практике используются коэффициенты асимметрии β_1 и эксцесса β_2 :

$$\beta_1 = \frac{M[(x - m_x)^3]}{\sigma_x^3}, \quad (4.6)$$

$$\beta_2 = \frac{M[(x - m_x)^4]}{\sigma_x^4} - 3. \quad (4.7)$$

4.2.1 Равномерный закон распределения

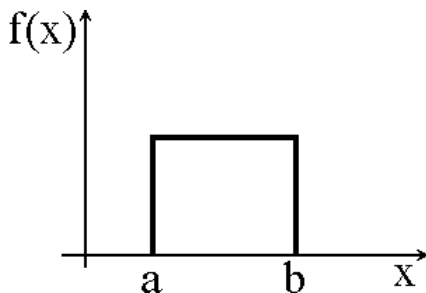


Рис. 4.4. Плотность равномерного закона распределения

Равномерным (равновероятным) называется закон распределения такой НСВ, которая с одинаковой вероятностью может принимать любое значение в заданных пределах (рис.4.4). Такому закону распределения, например, подчиняется ошибка при приближенных вычислениях, возникающая за счет округления чисел до какой-либо значащей цифры. При этом пределы ошибки

$[a, b]$ будут соответствовать половине значащей цифры, до которой происходит округление. Плотность распределения (4.1) определяется как

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a < x < b. \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Функция распределения (4.2) имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b. \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Математическое ожидание (4.3)

$$m_x = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{a+b}{2}.$$

Дисперсия (4.4)

$$\sigma^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b (x - m_x)^2 dx = \frac{1}{\sqrt{12}} (b-a)^2.$$

Асимметрия (4.6) $\beta_1 = 0$, а эксцесс (4.7) $\beta_2 = -1,2$.

4.2.2 Экспоненциальное распределение

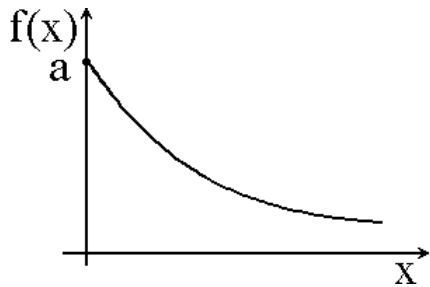


Рис. 4.5. Плотность экспоненциального распределения

Широко используется в теории надежности и в теории массового обслуживания.

Плотность распределения (4.1) (рис. 4.5)

$$f(x) = a \cdot e^{-a \cdot x},$$

функция распределения (4.2)

$$F(x) = 1 - e^{-ax},$$

математическое ожидание (4.3) $m_x = \frac{1}{a}$, дисперсия (4.6) $\sigma_x^2 = \frac{1}{a^2}$,

асимметрия (4.6) $\beta_1 = 2$, эксцесс (4.7) $\beta_2 = 6$.

4.2.3. Закон распределения Симпсона

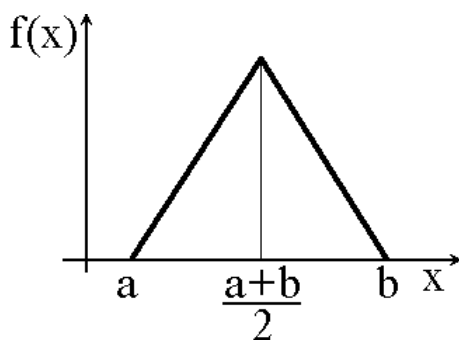


Рис. 4.6. Плотность распределения Симпсона

Закону Симпсона подчиняется распределение суммы двух независимых равномерно распределенных СВ.

Плотность распределения (4.1) (рис. 4.6)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < a \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & a < x < \frac{a+b}{2} \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & \frac{a+b}{2} < x < b \\ 0, & b < x < \infty \end{cases},$$

функция распределения (4.2)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & a < x < \frac{a+b}{2} \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & \frac{a+b}{2} < x < b \\ 1, & b < x \end{cases},$$

Среднее значение (4.3) $m_x = \frac{1}{2}(a+b)$, дисперсия (4.4)

$\sigma_x^2 = \frac{1}{24}(b-a)^2$, асимметрия (4.6) $\beta_1 = 0$, эксцесс (4.7) $\beta_2 = 0,6$.

4.2.4 Закон распределения арксинуса

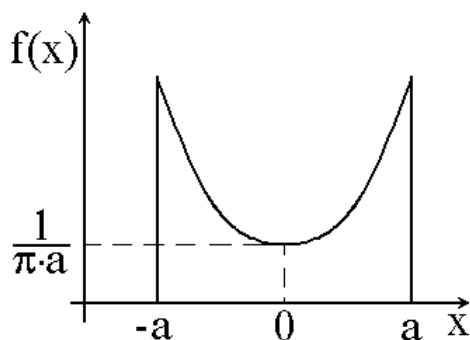


Рис. 4.7. Плотность распределения арксинуса

Закону арксинуса соответствует распределение мгновенных значений синусоиды со случайной начальной фазой.

Плотность распределения (4.1)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -a \\ \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}; & -a < x < a, \\ 0, & x > a \end{cases}$$

функция распределения (4.2)

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a}, & -a < x < a \\ 1 \end{cases}$$

Среднее значение (4.3) $m_x = 0$, дисперсия (4.4) $\sigma^2 = \frac{a^2}{2}$, асимметрия (4.6) $\beta_1 = 0$, эксцесс (4.7) $\beta_2 = -1,5$.

4.2.5. Закон распределения Рэлея

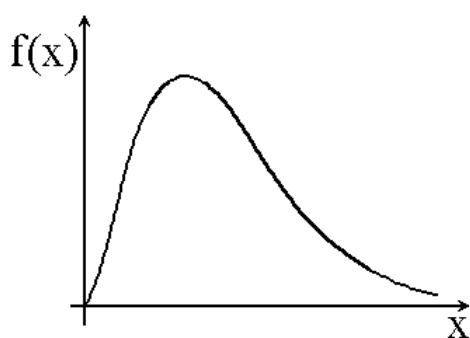


Рис. 4.8. Плотность распределения Рэлея

функция распределения (4.2)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \end{cases}$$

Среднее значение (4.3) $m_x = \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \approx 1,25\sigma$, дисперсия (4.4)

$D_x = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2 \approx 0,43\sigma^2$, асимметрия (4.6) $\beta_1 = 0,63$, эксцесс (4.7)

$\beta_2 = 0,3$.

4.2.6. Нормальный закон распределения

Согласно центральной предельной теореме [4] сумма большого количества независимых случайных величин имеет нормальное распределение. Нормальным законом описывается множество различных по своей природе случайных величин. Он используется в различных областях науки и техники в качестве вероятностной модели шума и является одной из основных вероятностных моделей в статистической радиотехнике.

Плотность распределения (4.1) (рис. 4.9)

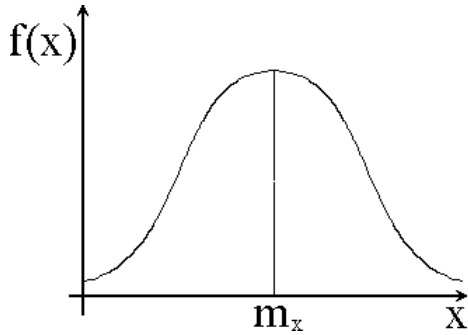


Рис. 4.9. Плотность нормального закона распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Функция распределения (4.2) не выражается в аналитических функциях:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Среднее значение (4.3) $m_x = a$, дисперсия (4.4) $D_x = \sigma^2$, асимметрия

(4.6) и эксцесс (4.7) равны нулю.

Стандартное обозначение

$$f(x) = N(x; a, \sigma),$$

например $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = N(x; 0, 1)$.

4.3. Вероятностные модели многомерных случайных величин

Рассмотренные выше статистические функции применяются для описания свойств отдельных случайных величин. На практике необходимо рассматривать совокупности случайных величин, возникающие, когда описываемый процесс характеризуется рядом параметров, например:

- размерами объекта (длина, ширина, высота);
- координатами объекта в пространстве $\{x, y, z\}$ или на плоскости $\{x_1, x_2\}$ (рис. 4.10);
- разнородными параметрами технологического процесса (температура, масса, давление);
- в случае медико-биологических сигналов, например, в кардиографии при одновременном съеме нескольких сигналов с нескольких точек тела пациента (рис.4.11).

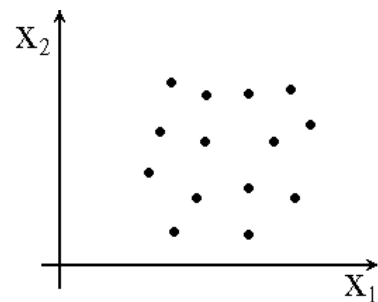


Рис. 4.10. Двумерная случайная величина

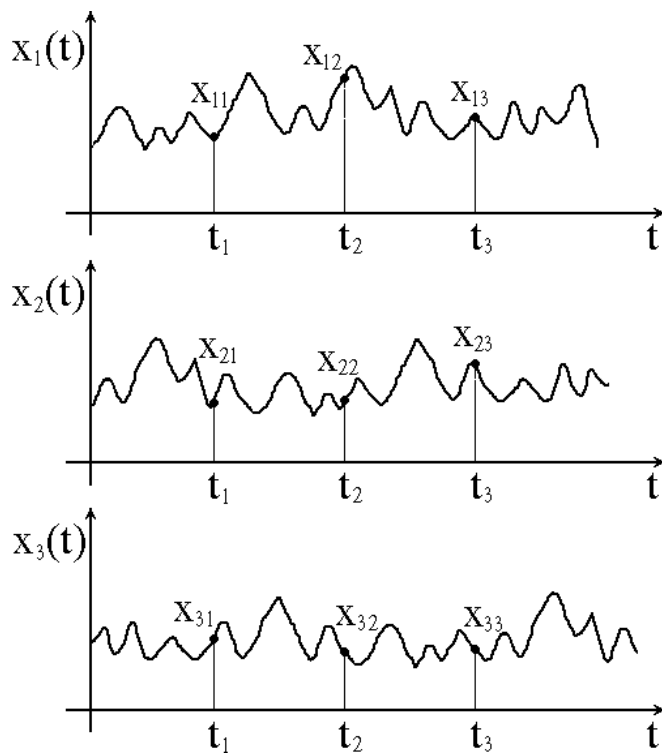


Рис. 4.11. Многомерный случайный процесс

Совокупность случайных величин, описывающих некоторый процесс, объединяют в вектор параметров x_i и говорят о многомерной случайной величине

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{M1} & x_{M2} & \dots & x_{MN} \end{bmatrix},$$

имеющей случайные значения x_{ij} , $i = 1, M$; $j = 1, N$ (N отсчетов, см. рис. 4.11).

Каждая из компонент вектора \vec{x} является случайной величиной со своим законом распределения $f(x_i)$.

4.3.1. Многомерный закон распределения

Рассмотрим для конкретности двумерный вектор случайных величин $\vec{x} = [x_1, x_2]$. Двумерная случайная величина может быть описана двумерным законом распределения (рис. 4.12):

- плотностью распределения

$$f(x_1, x_2) = \lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0}} \frac{P[(\xi_1 < x_1 < \xi_1 + \Delta x_1) \cap (\xi_2 < x_2 < \xi_2 + \Delta x_2)]}{\Delta x_1 \Delta x_2};$$

- функцией распределения

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = P[x_1 < \xi_1 \cap x_2 < \xi_2].$$

Причем
$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

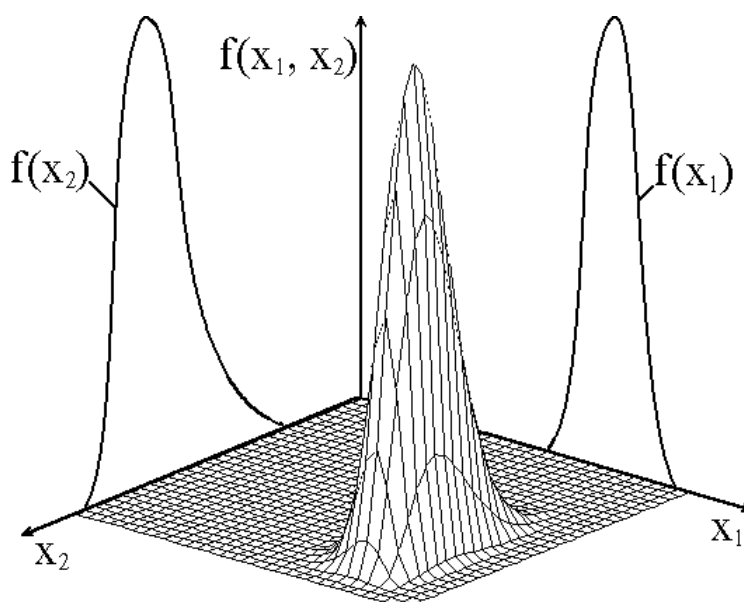


Рис. 4.12. Плотность распределения двумерной случайной величины

Двумерная плотность распределения связана с одномерными как

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2|x_1) \text{ или } f(x_1, x_2) = f(x_2) \cdot f(x_1|x_2),$$

где $f(x_i|x_j)$ - условная плотность распределения.

Если величины x_1 и x_2 независимы, то

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2).$$

4.3.2. Корреляция

Случайные величины являются зависимыми, если изменение одной приводит к изменению плотности распределения другой (рис. 4.13).

Случайные величины называются коррелированными, если изменение одной случайной величины приводит к изменению математического ожидания другой (рис.4.14).

Следует иметь ввиду, что некоррелированность не означает независимости, в то время как независимые величины всегда некоррелированы.

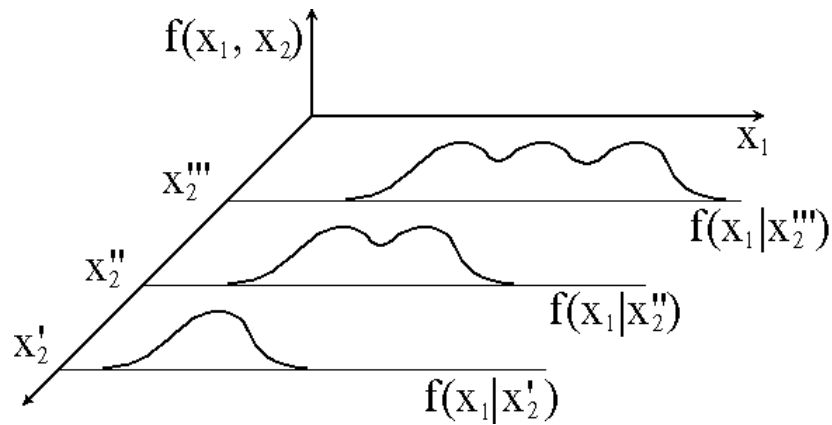


Рис. 4.13. Изменение плотности распределения двумерной случайной величины.

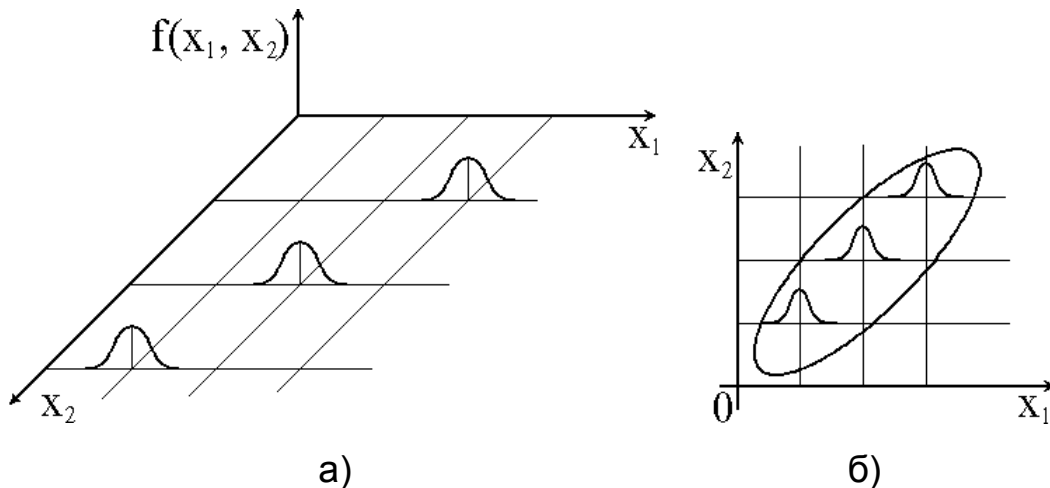


Рис. 4.14. Изменение плотности распределения двумерной коррелированной величины:
 а) сечения закона распределения коррелированной двумерной случайной величины;
 б) проекция закона на плоскость (x_1, x_2)

Степень корреляционной зависимости двух случайных величин описывается коэффициентом корреляции

$$K_{12} = K(x_1; x_2) = M[\dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}_1) \cdot (x_2 - \bar{x}_2) \cdot f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (4.9)$$

Физический смысл коэффициента корреляции – степень влияния одной случайной величины на другую. На практике часто используют нормированный коэффициент корреляции (см. рис. 4.15)

$$r_{12} = \frac{K(x_1; x_2)}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}}, \quad -1 \leq r \leq 1. \quad (4.10)$$

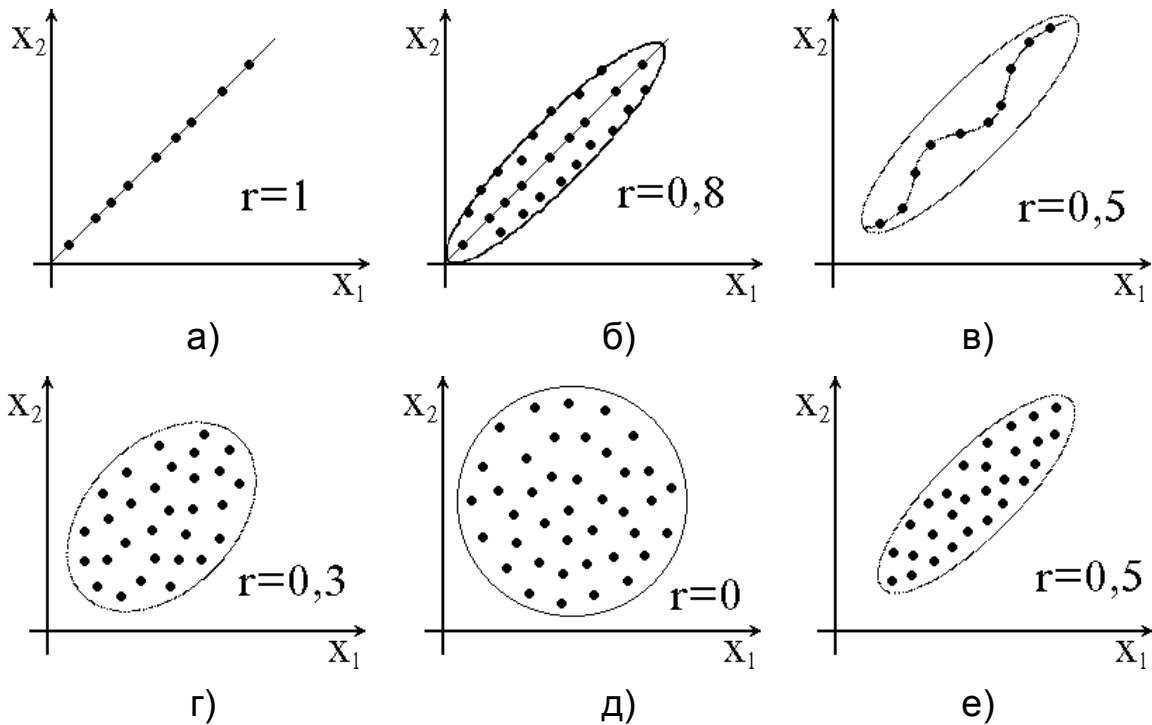


Рис. 4.15. Физический смысл коэффициента корреляции
а) линейно зависимые величины; б) сильно связанные случайные величины; в) однозначно нелинейно-связанные величины; г) слабо связанные величины; д) независимые случайные величины; е) коррелированные величины с эквивалентной случаю в) корреляцией

Если взаимосвязь двумерных случайных величин описывается коэффициентом корреляции, то для описания многомерных случайных величин используется корреляционная матрица. Если вектор $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_M]$, то взаимосвязь x_i и x_j характеризуется коэффициентами корреляции K_{ij} (4.9), которые образуют корреляционную матрицу:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Поскольку $r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$, то $K_{ij} = r_{ij} \sigma_i \sigma_j$. Матрица симметрична:

$$[K] = \begin{bmatrix} r_{11} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_1 & r_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 & \dots & r_{1N} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_N \\ r_{21} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 & & & \\ & \dots & & \\ r_{N1} \cdot \sigma_N \cdot \sigma_1 & & \dots & r_{NN} \cdot \sigma_N \cdot \sigma_N \end{bmatrix}.$$

Поскольку $r_{11} = 1$, то

$$[K] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & r_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \dots & r_{1N} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_N \\ r_{21} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 & \sigma_2^2 & \dots \\ r_{N1} \cdot \sigma_N \cdot \sigma_1 & \dots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}.$$

Для некоррелированных процессов $r_{ij} = 0$

$$[K_{некор}] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_N^2 \end{bmatrix} = [\sigma^2] \cdot \mathbf{I},$$

где \mathbf{I} – единичная матрица, $[\sigma^2]$ – матрица дисперсий.

Из нормированных коэффициентов корреляции образуется нормированная корреляционная матрица

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} \dots & r_{1N} \\ & 1 & \\ r_{N1} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \text{ причем } [K] = [\sigma^2] \cdot [R]$$

4.3.3. Многомерный нормальный закон распределения

Многомерный нормальный закон распределения – наиболее широко используемая на практике модель векторных случайных величин.

Векторной случайной величине $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ соответствует вектор математических ожиданий $\vec{m} = \{m_1, m_2, \dots, m_M\}$ и корреляционная матрица $[K]$ (4.11).

Если каждая из компонент вектора \vec{x} распределена по нормальному закону

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_i - m_i)^2}{\sigma_i^2}},$$

то многомерный закон распределения будет иметь вид (рис. 4.16)

$$f(\vec{x}) = (2\pi)^{-\frac{M}{2}} (\det K)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-0,5(\vec{x} - \vec{m})^T K^{-1}(\vec{x} - \vec{m})\}.$$

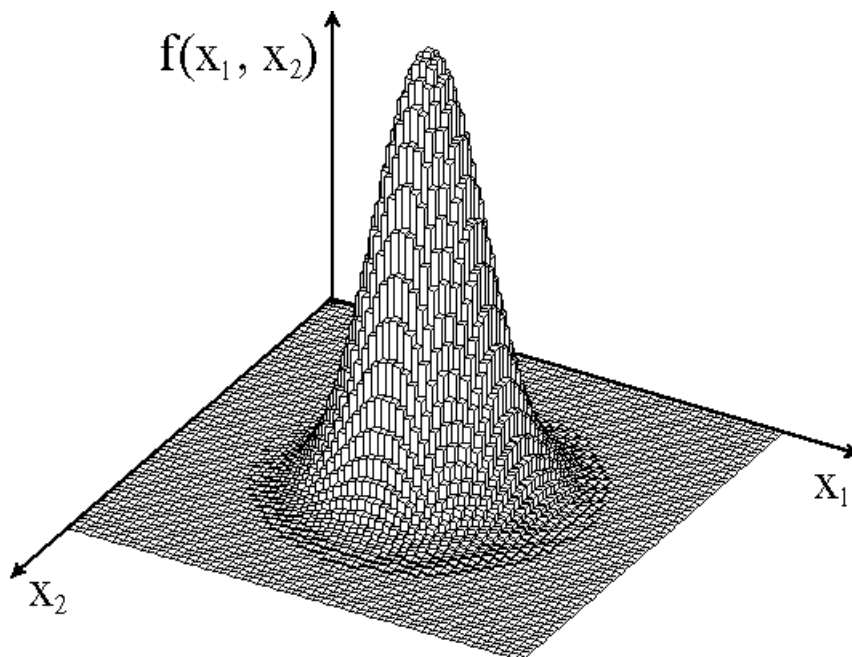


Рис. 4.16. Двумерная плотность распределения нормального закона

Либо в другой форме

$$f(\vec{x}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M |K_{ij}| \cdot (x_i - m_i) \cdot (x_j - m_j)}{|K|}\right\}}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} |K|^{1/2}}, \quad (4.12)$$

где $|K|$ – определитель матрицы $[K]$;

$|K_{ij}|$ – алгебраическое дополнение элемента K_{ij} .

Поскольку $K_{ij} = \sigma_i \sigma_j r_{ij}$, то σ_i, σ_j , можно вынести за скобки. Тогда

при $M = 2$ плотность нормального закона распределения примет вид

$$f(x_1, x_2) = \frac{\exp\left\{-\frac{\left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2r_{12} \cdot \left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1}\right) \cdot \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2}\right)^2}{2 \cdot (1 - r_{12}^2)}\right\}}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sqrt{1 - r_{12}^2}}$$

где $r_{12} = \frac{K_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$ – нормированный коэффициент корреляции x_1 и x_2 (4.10).

Очевидно, что для некоррелированных случайных величин $r_{12} = 0$ и $f(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$.

Многомерный нормальный закон имеет следующие важные особенности:

- он полностью определяется средними значениями \vec{m} и коэффициентами корреляции K_{ij} ;
- для нормального вектора случайных величин некоррелированность означает независимость.

4.4. Декоррелирующие преобразования случайных величин

Вследствие сложности вероятностных моделей коррелированных случайных величин на практике часто выполняют декоррелирующие преобразования, позволяющие привести вектор коррелированных величин \vec{x} к вектору некоррелированных случайных величин \vec{y} .

Допустим, имеется M -мерный вектор \vec{x} с нормальным законом распределения компонент. Над ним может быть выполнено линейное преобразование A :

$$\vec{y} = [A] \cdot \vec{x}, \quad (4.13)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1M} \\ \dots \\ a_{M1} \dots a_{MM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_M \end{bmatrix}.$$

Для нормального закона распределения (4.12)

$$\vec{m}_y = [A] \cdot \vec{m}_x,$$

$$[K_y] = [A] \cdot [K_x] \cdot [A]^T.$$

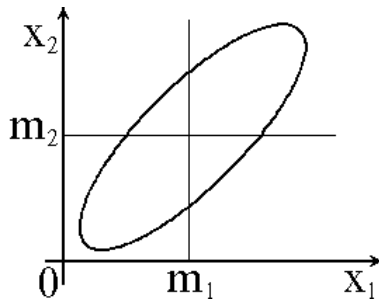


Рис. 4.17. Проекция закона распределения двумерной случайной величины

Если потребовать $[K_y] = \mathbf{I}$, где \mathbf{I} – единичная матрица, то преобразование (4.13) будет декоррелирующим.

Декоррелирующее преобразование полностью определяется вектором \vec{m}_x и матрицей коэффициентов корреляции $[K_x]$ (рис. 4.17) и соответствует линейному преобразованию системы координат (смещение, поворот, масштабирование осей; см.

рис. 4.18..4.20).

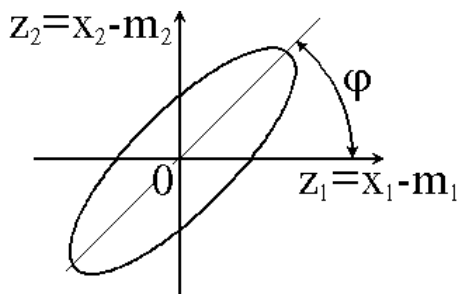


Рис. 4.18. Проекция закона распределения центрированной случайной величины

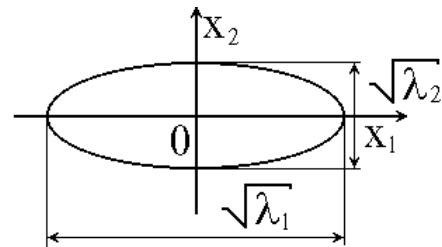


Рис. 4.19. Физический смысл собственных чисел корреляционной матрицы

Методика декорреляции включает в себя следующие этапы:

1) Центрирование вектора \vec{x} (рис. 4.18):

$$\vec{z} = \vec{x} - \vec{m}.$$

2) Для нахождения декоррелирующего преобразования вида (4.13) вектора \vec{x} необходимо потребовать $[K_y] = \mathbf{I}$. Если $[K_x]$ – невырожденная симметричная матрица, то существует характеристическое уравнение

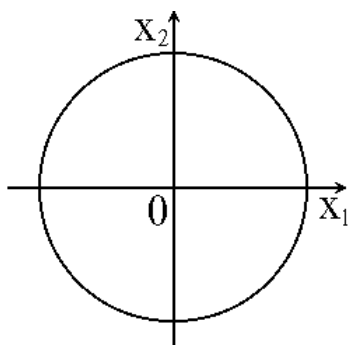


Рис. 4.20. Проекция закона распределения декоррелированной случайной величины

$$[K_x] - [\lambda] \cdot \mathbf{I} = 0.$$

У матрицы $[K_x]$ размером $M \times M$ существует M собственных чисел $\lambda_i, i = 1, M$ (рис. 4.19) и M собственных векторов $\Phi = [\Phi_1 \dots \Phi_M]$ (рис. 4.18).

3) Матрицы собственных чисел $[\lambda]$ и собственных векторов $[\Phi]$ могут быть найдены путем применения стандартных математических процедур [10]. Тогда декоррелирующее преобразование (4.13) примет вид

$$[Y] = [\lambda]^{-1/2} [\Phi]^T [Z], \text{ т.е. } \text{искомый линейный оператор в (4.13)}$$

$$[A] = [\lambda]^{-1/2} [\Phi]^T.$$

4.5 Функциональные преобразования случайных величин

Преобразование вероятностной модели (вида закона распределения) могут быть выполнены путем нелинейных преобразований случайных величин. Пусть законом распределения $f_x(x)$ задана случайная величина x .

Случайная величина y связана с x детерминированной функцией $\varphi(x)$ (рис. 4.21-а). Нужно определить закон распределения $f_y(y)$ величины y .

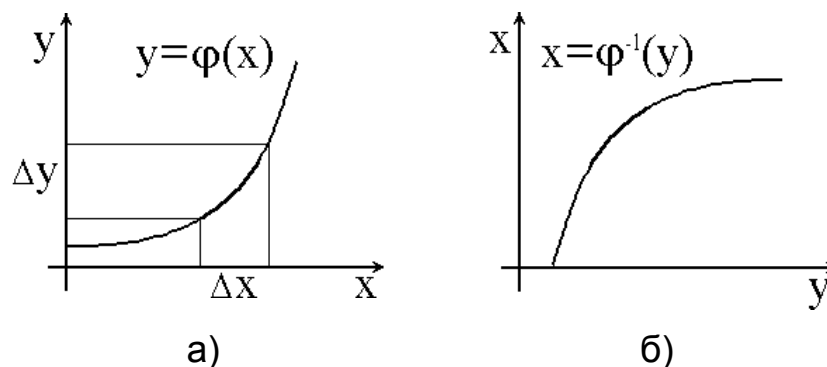


Рис. 4.21

Предположим, что обратная функция $x = \varphi^{-1}(y)$ (рис. 4.21-б) существует и однозначна. Вероятность того, что значение ξ заключено в промежутке $[x, x + \Delta x]$ должна быть равна вследствие однозначной связи между x и y вероятности того, что величина η заключена в соответствующем промежутке $[y, y + \Delta y]$ (см. рис. 4.21), т.е.

$$P(x < \xi < x + \Delta x) = P(y < \eta < y + dy).$$

Если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta y \rightarrow 0$ и

$$f_x(x)dx = f_y(y)dy,$$

откуда следует, что

$$f_x(y) = f_x(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|.$$

Операция взятия модуля производной необходима, чтобы $f_y(y)$ была неотрицательной.

Введя вместо x обратную функцию $x = \varphi^{-1}(y)$, получим

$$f_x(y) = f_x(\varphi^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\partial \varphi^{-1}(y)}{\partial y} \right|. \quad (4.14)$$

Если $\varphi^{-1}(y)$ является двузначной, то формулу (4.14) необходимо применить дважды по отношению к каждой из ветвей [7]

$$f_x(y) = f_x(\varphi_1^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} \{ \varphi_1^{-1}(y) \} \right| + f_x(\varphi_2^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} \{ \varphi_2^{-1}(y) \} \right|.$$

Пример

Найти $f_y(y)$ если $y = 1/x$, $x > 0$ и $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

Вид исходного закона распределения представлен на рис. 4.22-а.

Поскольку $y = \varphi(x) = 1/x$, то обратная функция $\varphi^{-1}(y) = 1/y$. Тогда

$$\frac{\partial \varphi^{-1}(y)}{\partial y} = \left| -\frac{1}{y^2} \right| = \frac{1}{y^2}. \quad (4.15)$$

Подставив вместо x обратную функцию $y = \frac{1}{x}$ и (4.15) в (4.14), получим:

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma y^2}} e^{-\frac{(\frac{1}{y}-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Полученный закон распределения будет иметь вид, представленный на рис. 4.22-б.

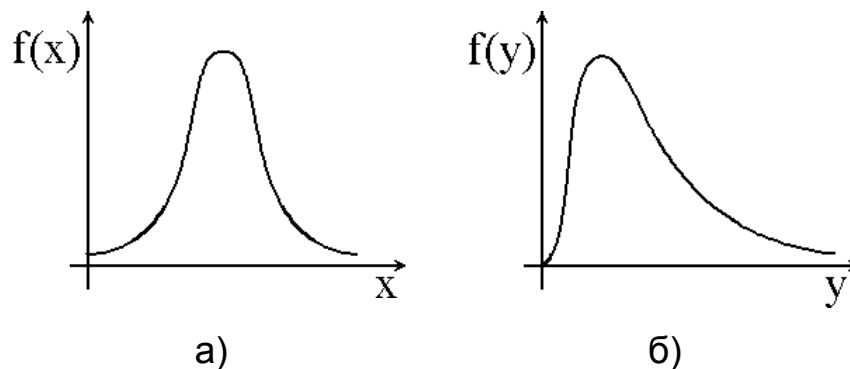


Рис. 4.22. Законы распределения случайной величины: а) исходный; б) преобразованный

4.6. Функциональные преобразования многомерных законов распределения

В случае необходимости преобразования многомерных вероятностных моделей также применяются функциональные преобразования случайных величин. Методику их применения рассмотрим на примере двумерного закона распределения.

Пусть задана двумерная плотность распределения $f(x_1, x_2)$ и функциональные преобразования

$$\begin{aligned} y_1 &= \psi_1(x_1, x_2), \\ y_2 &= \psi_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Допустим, существуют обратные функции

$$x_1 = \varphi_1(y_1, y_2),$$

$$x_2 = \varphi_2(y_1, y_2).$$

По аналогии с одномерным случаем из равенства вероятностей на интервалах $\Delta x_1 \Delta x_2$ и $\Delta y_1 \Delta y_2$ следует

$$f_y(y_1, y_2) = f_x(\varphi_1, \varphi_2) \left\| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right\|.$$

Величина

$$[J] = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}$$

представляет собой матрицу частных производных и называется якобианом перехода от $f(\vec{x})$ к $f(\vec{y})$. Во всех случаях, кроме $[J]^{-1} = 0$, справедливо равенство [7]

$$[J] = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial x}} = \frac{1}{[J]^{-1}}.$$

Иногда удобнее находить $[J]^{-1}$ как

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

Тогда преобразованный закон распределения может быть найден как

$$f_y(y_1, y_2) = f_y(\varphi_1, \varphi_2) \frac{1}{|[J]^{-1}|}.$$

Пример.

Пусть имеются случайные координаты точки в декартовой системе координат (x, y) . Известно, что

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \text{ и } f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}.$$

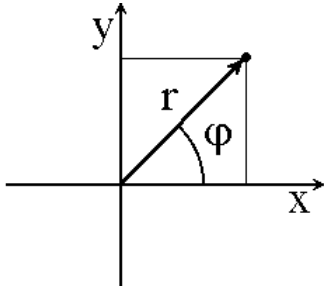


Рис. 4.23.

Точка с координатами (x, y) в полярной системе будет иметь координаты r и φ (рис. 4.23). Переход от полярной системы координат к декартовой записывается как

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi.$$

Требуется найти законы распределения r и φ , т.е. модуля (длины вектора) и фазы (угла поворота вектора).

Решение.

Так как x и y - независимые случайные величины, то

$$f(x, y) = f(x) \cdot f(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}.$$

Якобиан перехода от $\{x, y\}$ к $\{r, \varphi\}$ может быть найден как

$$J_{k,\varphi} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & -r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Тогда при $r > 0$

$$f(r, \varphi) = f[x(r, \varphi), y(r, \varphi)] \cdot J_{k,\varphi} = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}.$$

Одномерные законы $f(r)$ и $f(\varphi)$ можно определить по двумерному путем интегрирования по r и φ :

$$f(r) = \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \varphi) d\varphi = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, r > 0.$$

Этот закон носит название закона Рэлея.

$$f(\varphi) = \int_0^{\infty} f(r, \varphi) dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = \frac{1}{2\pi},$$

т.е. $f(\varphi) = 1/2\pi$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$ – закон распределения угла φ равновероятный.

4.7 Модели вероятностных процессов

Входные воздействия на системы, их выходные реакции и внутренние параметры, а также внешние факторы, воздействующие на системы, во многих случаях являются случайными функциями неслучайного аргумента, такого, как время, пространственные координаты, частота. Поэтому такие случайные функции называют вероятностными, стохастическими или случайными процессами (СП) [5,6,7]. Если случайный процесс является функцией вектора аргументов, например, координаты (x, y, z) , то такие СП называют случайными полями. Случайный процесс или поле задается совокупностью своих реализаций (ансамблем выборочных функций).

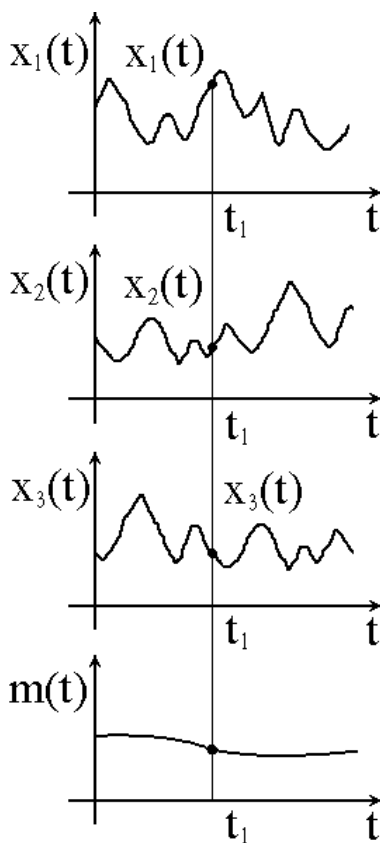


Рис. 4.24

стью своих реализаций (ансамблем выборочных функций). Например, $s(t) = a_i \sin \omega t$ – гармонический сигнал со случайной амплитудой.

4.7.1. Основные характеристики случайных процессов

Рассмотрим множество выборочных функций $x_k(t)$, $k = 1, N$.

Функция от времени $x(t)$, описывающая случайное явление, называется выборочной функцией (которая может быть неслучайной). При конечном интервале наблюдения выборочная функция (выборка) называется реализацией случайного процесса.

Мгновенное значение реализации в момент времени $t = t_i$, будем называть отсчетом k -той реализации случайного процесса (рис. 4.24).

Определим основные характеристики СП.

1. Первой и важнейшей характеристикой СП $x(t)$ является его математическое ожидание, т.е. "средняя" функция, вокруг которой происходит разброс реализаций.

Среднее значение СП в момент времени t_i может быть найдено путем суммирования отсчетов каждой выборочной функции ансамбля [6]

$$m_x(t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_i). \quad (4.16)$$

Путем изменения времени t от $t = 0$ до $t = \infty$ может быть определено математическое ожидание $m_x(t)$ – неслучайная функция времени, которая при любом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса (см. рис. 4.24)

$$m_x(t) = M\{x(t)\}$$

2. Многомерная функция распределения СП

$$\begin{aligned} F(x(t)) &= F_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) = \\ &= P\{x(t_1) \leq x_1; x(t_2) \leq x_2; \dots; x(t_N) \leq x_N\}. \end{aligned}$$

Физический смысл функции распределения – вероятность того, что некоторая реализация СП $x(t)$ пройдет ниже точек $x_i(t_i)$ (рис. 4.25, процесс $x'(t)$).

3. Многомерная плотность распределения

$$\begin{aligned} f_n(x_1, x_2, x_N; t_1, t_2, t_N) &= \frac{\partial^n F_n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_N} = \\ &= P\{x_1 < x(t_1) < x_1 + \Delta x_1; x_2 < x(t_2) < x_2 + \Delta x_2 \dots\}; \\ \Delta x_i &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

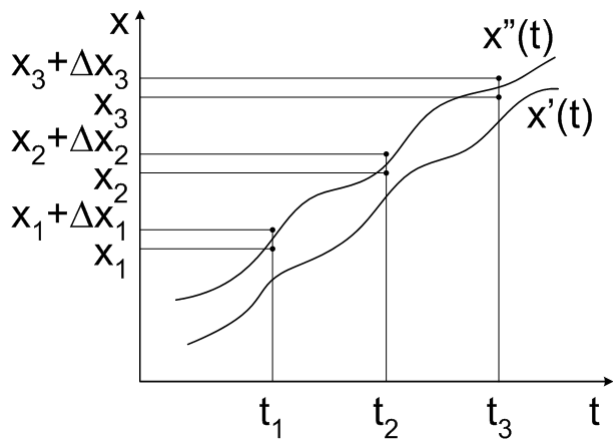


Рис. 4.25

Физический смысл плотности распределения – вероятность того, что $x(t)$ пройдет в моменты времени $t_1 \dots t_N$ в окрестности точек $x_1 \dots x_N$ (см. рис. 4.25, процесс $x''(t)$).

Тогда ранее введенное понятие математического ожидания (4.16) случайного процесса может быть представлено в виде моментной функции первого порядка

$$m_x(t) = m_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, t)dx = M\{x(t)\}. \quad (4.17)$$

4. Дисперсия случайного процесса (моментная функция 2-го порядка)

$$D_x(t) = m_2(t) = M\{(x(t) - m_x(t))^2\} \quad (4.18)$$

характеризует разброс СП относительно средней функции.

5. Среднеквадратическое отклонение определяется как

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}. \quad (4.19)$$

6. Корреляционная функция СП характеризует взаимосвязь реализаций функций СП в моменты времени t_1 и t_2

$$R_x(t_1, t_2) = M\{(x_1(t_1) - m(t_1))(x_2(t_2) - m(t_2))\}. \quad (4.20)$$

7. Нормированная корреляционная функция

$$r(t_1, t_2) = \frac{R_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)} \quad (4.21)$$

характеризует статистическую связь между двумя сечениями случайного процесса.

8. Для двумерных процессов \vec{x} или двух случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$ используется взаимная корреляционная функция

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int \int (y(t_1) - m_y(t_1))(x(t_2) - m_x(t_2))f(x, y, t_1, t_2) dx dy. \quad (4.22)$$

9. Поскольку процессы – функции времени, то преобразование Фурье для отдельной реализации дает спектральную плотность случайного процесса.

$$S_k(\omega_1) = F(x_k(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x_k(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.23)$$

4.7.2 Классификация типов процессов

СП называют [1,6] стационарным в широком смысле, если выполняются два условия:

- 1) математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, т.е. $m_x(t) = m_x$, $\sigma_x^2(t) = \sigma_x^2$;
- 2) корреляционная функция (4.22) зависит не от момента времени t_1 , а только от интервала времени $\tau = t_2 - t_1$:

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) = R_x(t_2 - t_1).$$

Стационарные в широком смысле процессы называют еще слабостационарными.

СП называют стационарными в узком смысле или строго стационарными [1,6], если, в дополнение к вышеуказанным условиям от времени также не зависит функция распределения (и плотность распределения) первого порядка:

$$F(x, t) = F(x), \quad f(x, t) = f(x),$$

а функция распределения второго порядка зависит не от моментов времени t_1 и t_2 , а от их разности $\tau = t_2 - t_1$, т.е.

$$F_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = F_2(x_1, x_2, t_1 + \tau, t_2 + \tau) = F_2(x_1, x_2, t_2 - t_1).$$

Разновидностью стационарных СП являются эргодические процессы. СП называется эргодическим, если его статистические характеристики, определенные по совокупности реализаций, совпадают с характеристиками, полученными путем усреднения по времени одной реализации:

$$M_x = \sum_i x_i(t) = m_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt;$$

$$R_x(t) = \frac{1}{T} \int (x(t) - m_x) \cdot (x(t + \tau) - m_x) dt;$$

$$D_x = R_x(0) = \frac{1}{T} \int_0^t (x(t) - m_x)^2 dt.$$

4.7.3. Характеристики стационарных процессов

Математическое ожидание процесса

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (4.24)$$

характеризует постоянную составляющую процесса.

Среднее значение квадрата

$$\psi_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (4.25)$$

характеризует полную энергию процесса.

Дисперсия процесса

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - m_x)^2 dt \quad (4.26)$$

дает оценку энергии переменной (флуктуационной) составляющей процесса, а СКО σ_x определяет амплитуду переменной составляющей. Полная энергия процесса состоит из энергии переменной и постоянной составляющих:

$$\psi_x^2 = m_x^2 + \sigma_x^2.$$

Плотность распределения процесса определяет вероятность того, что значение процесса в произвольный момент времени будут заключены в произвольном интервале Δx :

$$T(x) = \sum_{i=1}^N \Delta t_i$$

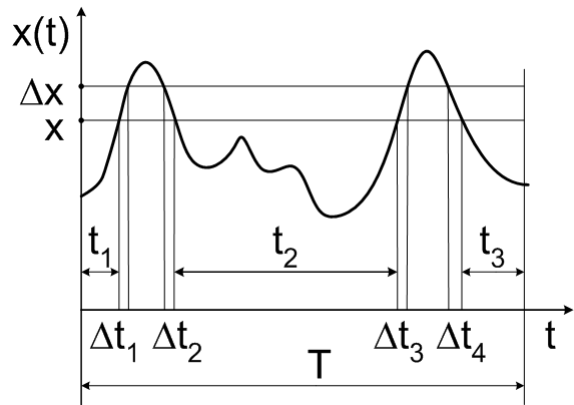


Рис. 4.26

(рис. 4.26). Вероятность пребывания в интервале $[x, x + \Delta x]$ можно найти, вычисляя отношение продолжительности пребывания процесса в интервале Δx к общему времени наблюдения за процессом T

$$P[x < x(t) < x + \Delta x] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T(x)}{T},$$

при $\Delta x \rightarrow 0$ $P[x] \rightarrow f(x)$, причем

$$f(x) \geq 0 \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Функция распределения стационарного СП определяет вероятность того, что процесс находится ниже уровня x (см. рис. 4.26)

$$F(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum t_i}{T};$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz; \quad 0 \leq F(x) \leq 1.$$

Корреляция – важный признак СП, характеризующий статистическую связь между сечениями процесса через время τ . Различают: некоррелированные процессы (δ -коррелированные), непрерывно коррелированные ($R(\tau)$ не затухает), коррелированные ($R(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$), дискретно-коррелированные и др.

Автокорреляционная функция (АКФ) $R_x(\tau)$ дает представление о повторяемости значений централизованного процесса через интервал времени τ

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - m_x)(x(t + \tau) - m_x) dt. \quad (4.27)$$

$R_x(\tau)$ характеризует зависимость процесса в данный момент времени от его значений в предыдущие моменты времени. АКФ всегда действительная, четная функция времени с максимумом в точке $\tau = 0$, в которой она равна дисперсии процесса (4.26):

$$R_x(0) = \sigma_x^2.$$

Нормированная АКФ:

$$r_x(t) = \frac{R_x(\tau)}{\sigma_x^2}. \quad (4.28)$$

Взаимная корреляционная функция (ВКФ) $R_{xy}(\tau)$ характеризует взаимосвязь двух центрированных процессов в различные моменты времени

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - m_x)(y(t + \tau) - m_y) dt. \quad (4.29)$$

Нормированная ВКФ:

$$r_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (4.30)$$

Понятие корреляционной функции позволяет определить интервал корреляции случайного процесса как промежуток времени, в течении которого АКФ спадает до 5%. Интервал (радиус) корреляции характеризует время, по истечении которого процесс можно считать некоррелированным [6].

Спектральный состав процесса характеризуется спектральной плотностью мощности $S^2(f)$, т.е. распределением мощности процесса по отдельным спектральным составляющим.

Если реализацию $x(t)$ подать на вход узкополосного фильтра с полосой пропускания Δf и перестраиваемой частотой f , а на выходе фильтра усреднять квадрат выходного напряжения, то при $\Delta f \rightarrow 0$ может быть получена спектральная плотность процесса

$x(t)$ [1,6]

$$S_x^2(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{x^2(t, f, \Delta f)}{\Delta f} dt. \quad (4.31)$$

Спектральную плотность мощности (4.31) называют еще энергетическим спектром в отличие от амплитудного спектра

$$S_x(f) = \int_0^T x(t) e^{-j2\pi t} dt.$$

Важное свойство спектральной плотности мощности заключается в ее связи с корреляционной функцией через преобразование Фурье согласно теореме Винера – Хинчина [1]:

$$S_x^2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x^2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

В вещественной форме эта взаимосвязь записывается как

$$S_x^2(\omega) = \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos\omega\tau d\tau.$$

Из теоремы Винера – Хинчина вытекает свойство неопределенности: чем уже $R_x(\tau)$, тем шире спектр. Предельный случай – случайный процесс типа "белый шум": $R_x(\tau) = \delta(\tau)$; $S_x^2(\omega) = N_0^2$, т.е. у некоррелированного случайного процесса спектральная плотность постоянна на всех частотах.

4.7.4. Модели частных случаев случайных процессов

Узкополосные процессы – случайные процессы, спектральная плотность $S_x(\omega)$ которых сосредоточена в некотором частотном интервале $\Delta\omega$, при этом $\Delta\omega \ll \omega_0$, где ω_0 – центральная частота процесса. Такие процессы возникают при случайной модуляции не-

сущих колебаний с частотой ω_0 . Основное свойство – корреляционная функция имеет осциллирующий затухающий характер с огибающей, соответствующей АКФ модулирующего процесса (рис.4.27).

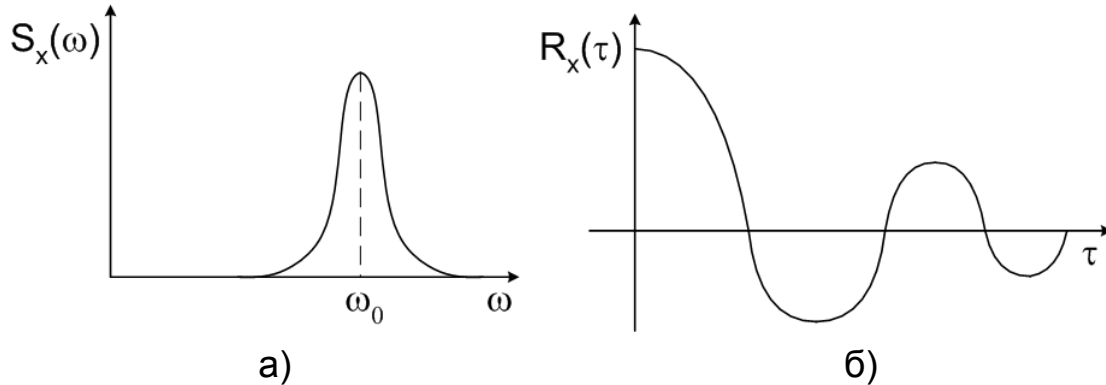


Рис.4.27

Квазидетерминированные СП характеризуются совокупностью реализаций, каждая из которых описывается детерминированной временной функцией со случайными параметрами, которые остаются постоянными в пределах одной реализации, но случайным образом изменяются от реализации к реализации.

Например:

- 1) $x(t) = A_k \cos \omega t$, где A_k – амплитуда случайная для каждой k -той реализации;
- 2) $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_k)$ – сигнал со случайной фазой φ_k ;
- 3) Полиномиальные случайные сигналы описываются уравнением

$$x(t) = \sum_{k=0}^m Q_k t^k,$$

где Q_k случайная величина.

Частный случай таких сигналов – нестационарный случайный процесс

$$x(t) = a_0 + kt,$$

где k случайная величина. Этот процесс характерен для процессов разрегулирования, когда исходные значения параметров устанавливаются точно, а в процессе эксплуатации параметры изменяются случайно для различных изделий [11].

Гауссовские случайные процессы – процессы $\vec{x} = \{x(t_i)\}$, n -мерная плотность распределения которых представляется в виде

$$f_n(\vec{x}, \vec{t}) = (2\pi)^{-n} |R|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{m})^T R^{-1}(\vec{x} - \vec{m})\right\},$$

где: $m_i = M\{x(t_i)\}$; $R_{ij} = M\{(x(t_i) - m_i) \cdot (x(t_j) - m_j)\}$ – корреляционная матрица.

Особенность Гауссовских процессов состоит в том, что Гауссовский процесс, стационарный в широком смысле, автоматически является стационарным в узком смысле.

4.7.5. Случайные процессы с дискретным временем

Пусть некоторый СП изменяет свое значение в дискретные моменты времени $0, t_1, t_2, t_3 \dots t_n$ и на каждом i -м шаге дискретный процесс может принимать дискретные значения из множества

$$x^{(i)} = \{x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \dots x_L^{(i)}\},$$

причем $\sum_{k=1}^{L^{(i)}} P_k^{(i)} = 1$. Дискретный СП называют определенным, если

для каждого шага определены вероятности того, что на $i+1$ шаге процесс примет определенное k -тое значение при условии, что до этого была зафиксирована реализация $\{x^{(0)} \dots x^{(i)}\}$:

$P\{x^{(i+1)} = x_k^{(i+1)} | x^{(0)} \dots x^{(i)}\} = P_k^{(i+1)}$. В зависимости от вида распределения $P_k^{(i)}$ выделяют следующие разновидности определенных дискретных СП [5]:

1) процесс с независимыми значениями, если вероятность

$$P_k^{(i)} = P_k, \text{ т.е. процесс не зависит от предыстории;}$$

2) процесс независимых испытаний – частный случай предыдущего, когда пространство исходов одно и то же для различных шагов $\{L^{(i)}\} = \{L\}$;

3) Марковский процесс (Марковская цепь) обладает одним и тем же пространством исходов (состояний), а распределение $P_k^{(i)}$ зависит только от исхода предыдущего шага, т.е.

$$P\{x^{(i+1)} = x_k^{(i+1)} | x^{(0)} \dots x^{(i)}\} = P\{x^{(i+1)} = x_k^{(i+1)} | x^{(i)}\}.$$

Вероятность того, что процесс из i -го состояния на n -том шаге перейдет в j -е состояние на $(n+1)$ шаге обозначают P_{ij} , причем, поскольку количество всех возможных состояний процесса равно L , то

$$\sum_{j=1}^L P_{ij} = 1.$$

Если вероятность P_{ij} не зависит от номера шага, то такую Марковскую цепь называют стационарной.

Марковские цепи описывают стохастической матрицей переходов (на n -том шаге)

$$P_{ij}(n) = \begin{bmatrix} P_{11}(n) & P_{12}(n) & \dots & P_{1L}(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{L1}(n) & & & P_{LL}(n) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

где P_{11} означает, что процесс находится на 1-м уровне на n -том шаге и там же останется на $n+1$ шаге с вероятностью P_{11} ;

P_{12} – процесс находится на 1 уровне и перейдет на следующем шаге на 2-й уровень с вероятностью P_{12} .

Пример.

Каждый элемент матрицы P_{ij} характеризует вероятность перехода из i в j состояние за один шаг (4.32):

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \\ 0,7 & 0,25 & 0,05 \end{bmatrix}.$$

Вероятность того, что процесс, находящийся в данный момент на уровне 2, перейдет на уровень 1, равна 0.4, на уровень 2 – 0.1, на

уровень 3 – 0.5.

Для полной характеристики Марковской цепи кроме матрицы переходов P_{ij} необходимо знать начальное распределение вероятностей $P_j(0)$, т.е. вероятности нахождения процесса на i -том уровне в начальный момент времени, причем $\sum P_i(0) = 1$.

Введенные определения позволяют решать ряд важных практических задач, например, рассчитать в каком состоянии окажется процесс через m шагов и какова вероятность i -го состояния через m шагов.

Вероятность перехода из состояния i в состояние j за 2 шага вычисляется по формуле $P_{ij}(2) = \sum_{l=1}^L P_{il}P_{lj}$. Эта запись соответствует перемножению матриц P , т.е. $P(2) = P \cdot P = P^2$. Если учесть начальные вероятности нахождения в $i = 1, L$ состояниях то, через m шагов

$$P_{ij}(m) = \sum_{i=1}^L P_i(0)P_i(m).$$

Если устремить $m \rightarrow \infty$, то $\lim_{m \rightarrow \infty} P_{ij}(m) = P'_j$, где P'_j – так называемые финальные вероятности, не зависящие от m . Если такие вероятности существуют, то Марковская цепь называется эргодической или регулярной. Достаточным признаком эргодичности является условие строгой положительности всех элементов матрицы $[P]$, т.е. $P_{ij} > 0$.

Найти финальные вероятности (при $m \rightarrow \infty$) состояний процесса эргодической Марковской цепи можно путем решения системы линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_j = \sum_{i=1}^L P_i P_{ij} \\ \sum_{j=1}^L P_j = 1; P_j > 0 \end{array} \right. \quad (4.33)$$

По финальным вероятностям может быть определена, например, вероятность отказа системы: Марковская цепь может иметь особое состояние – состояние, в котором цепь останется навсегда, т.е. $P_{ii} = 1, P_{ij} = 0, i \neq j$.

5. МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Линейными называют системы подчиняющиеся принципу суперпозиции: если на систему с оператором A воздействует совокупность внешних воздействий $x = \sum_{k=1}^n a_k \cdot x_k$, то реакция системы может быть представлена в виде суммы реакций на отдельные воздействия:

$$A \left\{ \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\} = y = \sum_{k=1}^n a_k A(x_k). \quad (5.1)$$

Принцип суперпозиции использует свойство аддитивности $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$ и свойство однородности $A(cx_1) = cA(x_1)$.

5.1. Линейные статические системы

Линейную систему называют статической, если выходная реакция системы зависит только от значений входных параметров в данный момент времени и не зависит от значений входных воздействий и состояний системы в предыдущие моменты времени.

Например $y = kx$ – одномерная линейная статическая система.

Многомерная (векторная) статическая система (рис. 5.1):

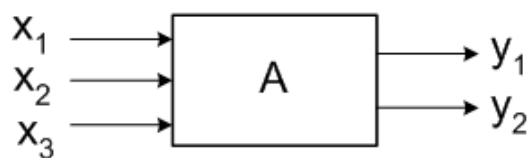


Рис. 5.1

- вектор входных воздействий

$$\vec{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

- вектор выходных реакций системы

$$\vec{y}^T = (y_1, y_2, \dots, y_m),$$

причем $\vec{y} = [A]\vec{x}$, где

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Оператор системы $[A]$ – матрица размером $n \times m$. Обычно $[A]$ приводят к квадратной матрице, путем добавления нулевых строк или столбцов. Реакция такой системы на вектор входных воздействий определяется как (рис. 5.2)

$$y_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$$

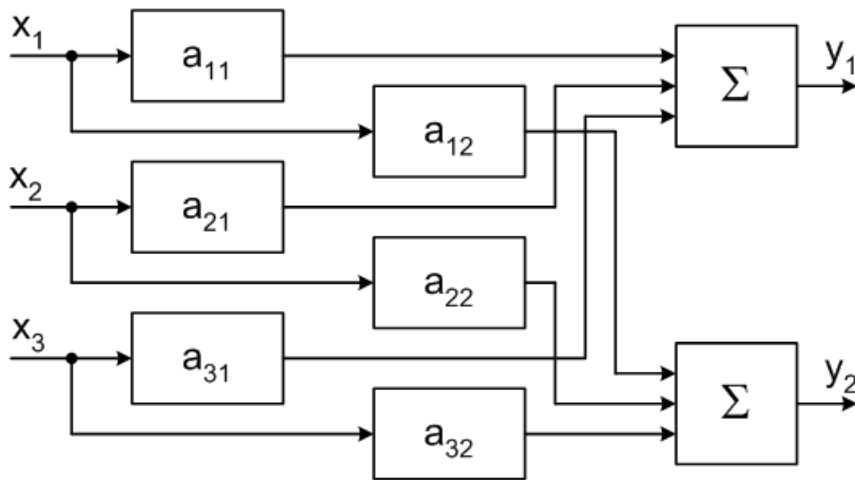


Рис. 5.2

Частные случаи линейных статических систем:

1) система с векторным входом и одним выходом:

$$\vec{y}^T = \{y_1, 0, 0, 0\}, \quad \vec{x}^T = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix};$$

2) система с одним входом и n -мерным выходом.

$$\vec{x}^T = \{x_1, 0, \dots, 0\}, \quad \vec{y}^T = \{y_1, y_2, \dots, y_m\},$$

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

5.2. Модели линейных динамических систем (ЛДС)

Систему называют динамической (инерционной), если значения ее выходного сигнала зависят от значений входного сигнала в тот же момент времени и от предшествующего состояния системы. С математической точки зрения ЛДС описывается дифференциальным уравнением

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i y(t)}{\partial t^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j x(t)}{\partial t^j}, \quad (5.2)$$

например:

$$a_2 \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial y(t)}{\partial t} + a_0 y(t) = b_1 \frac{\partial x(t)}{\partial t} + b_0 x(t),$$

или

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_1 x'(t) + b_0 x(t).$$

Как известно из математики, решение такого дифференциального уравнения состоит из двух частей: свободной и вынужденной:

$$y(t) = y_{св} (t) + y_{вын} (t),$$

где: $y_{св} (t)$ определяется решением однородного дифференциального

уравнения $\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = 0$ и характеризует процессы, происходящие внутри системы;

$y_{вын} (t)$ зависит от вида входного сигнала и в определенной степени повторяет вид этого входного сигнала.

Для исключения влияния входного сигнала рассмотрим ЛДС при нулевых начальных условиях:

$$x^{(j)}(0) = 0, \quad j = \overline{0, m-1},$$

$$y^{(i)}(0) = 0, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Применим к левым и правым частям преобразование Лапласа с учетом нулевых условий:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p),$$

где $F(p)$ – изображение по Лапласу оригинала $f(t)$.

Поскольку преобразование Лапласа является линейным преобразованием, то

$$\begin{aligned} L\left(\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t)\right) &= L\left(\sum_{j=0}^m b_j x^{(j)}(t)\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow Y(p) \sum_{i=0}^n a_i p^i &= X(p) \sum_{j=0}^m b_j p^j. \end{aligned}$$

Отношение изображения выходного сигнала ЛДС к изображению входного сигнала при нулевых начальных условиях называется передаточной функцией ЛДС:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}, \quad (5.3)$$

$$Y(p) = W(p) \cdot X(p). \quad (5.4)$$

При ненулевых начальных условиях

$$Y(p) = W(p) \cdot X(p) + N(p),$$

где $N(p)$ – изображение начальных условий.

Обратное преобразование Лапласа от выражения (5.4)

$$L^{-1}\{Y(p)\} = L^{-1}\{W(p) \cdot X(p)\}$$

позволяет определить выходную реакцию ЛДС $y(t)$ на входное воздействие $x(t)$ при нулевых начальных условиях $y(0) = x(0) = 0$ как

$$y(t) = L^{-1}\{W(p) \cdot X(p)\} = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau \quad (5.5)$$

или

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot w(t - \tau) d\tau.$$

Эта формула имеет фундаментальное значение в теории линейных систем и называется интегралом Дюамеля или сверткой функций $x(\tau)$ и $w(t)$. Таким образом, выходной процесс $y(t)$ представляет собой взвешенную сумму всех значений входного процесса. Весовая функция $w(t)$ представляет собой обратное преобразование Лапласа от передаточной функции системы

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\}. \quad (5.6)$$

Чтобы выяснить физический смысл весовой функции $w(t)$, возьмем в качестве входного воздействия δ -функцию $x(t) = \delta(t)$. Изображение по Лапласу δ -функции $L\{\delta(t)\} = 1$, тогда

$$Y(p) = W(p) \Big|_{x=\delta(t)},$$

откуда следует, что

$$y(t) = w(t) \Big|_{x=\delta(t)},$$

то есть $w(t)$ является реакцией ЛДС на входное воздействие в виде δ -функции (очень короткого импульса), поэтому $w(t)$ называется импульсной характеристикой системы.

Если в качестве входного воздействия задать единичную функцию Хевисайда $x(t) = 1(t)$, то $L\{1(t)\} = \frac{1}{p}$, следовательно

$$Y(p) = \frac{W(p)}{p} \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = \int_0^t w(\tau) d\tau = h(t). \quad (5.7)$$

$h(t)$ как интеграл от $w(t)$ называется переходной характеристикой системы, поскольку определяет переходные процессы в системе при подаче на ее вход единичного воздействия.

Таким образом ЛДС может характеризоваться:

- 1) дифференциальным уравнением (5.2);
- 2) передаточной функцией (оператором системы) (5.3);
- 3) импульсной характеристикой (5.6);

4) переходной характеристикой (5.7).

5.3. Основные свойства ЛДС

5.3.1. Физическая реализуемость ЛДС

В физически реализуемых системах сигнал на выходе системы не может появиться раньше входного сигнала, поскольку $w(t) = 0$ при $t < 0$. С математической точки зрения это означает, что в операторе передачи (5.3) должно выполняться условие $m \leq n$, то есть степень полинома числителя должна быть меньше либо равна степени полинома знаменателя.

Для физически реализуемых систем в интеграле Дюамеля (5.5) верхний предел может быть заменен на текущее значение времени:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) \cdot w(t - \tau) d\tau ,$$

поскольку $w(-|\tau|) = 0$. ЛДС, выполняя обработку поступающего на вход сигнала формирует выходной сигнал путем взвешенного суммирования всех мгновенных значений $x(t)$, существовавших в прошлом при $-\infty < \tau < t$. Роль весовой функции выполняет при этом импульсная характеристика.

Принципиально важно, что физически может быть реализована только такая система, которая не требует операции с «будущими» значениям сигналов.

5.3.2. Устойчивость ЛДС

Устойчивостью системы называют свойство системы возвращаться в исходное состояние по окончании воздействия или при сравнительно малых отклоняющих воздействиях. Условие устойчивости может быть также представлено в виде:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 0 .$$

Поскольку реакция физически реализуемой ЛДС должна быть

ограниченной, то ее импульсная характеристика (5.6) должна удовлетворять условию абсолютной интегрируемости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega(t)| dt < \infty.$$

В теории систем анализ устойчивости системы основан на анализе ее передаточной характеристики $W(p)$ (5.3).

Из математики известно, что любой полином можно разложить по его корням:

$$W(p) = \frac{B \cdot (p - \beta_1) \cdot (p - \beta_2) \cdot \dots \cdot (p - \beta_m)}{A \cdot (p - \alpha_1) \cdot (p - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (p - \alpha_m)}. \quad (5.8)$$

Точки β_j , в которых числитель обращается в нуль, называются нулями передаточной характеристики, а корни полинома знаменателя α_i (в точках $\alpha_i \cdot W(p) \rightarrow \infty$) называют полюсами передаточной характеристики системы.

Поскольку $p = \text{Re} + j \cdot \text{Im}$ – комплексное число, то нули и полюсы передаточной функции изображают на комплексной плоскости точками β_j и α_i .

Доказано, что система будет устойчивой, если полюса ее лежат левой полуплоскости, т.е. $\text{Re}(\alpha_i) < 0$. Система, у которой полюса имеются в правой части ($\text{Re}(\alpha_i) > 0$) будет неустойчивой.

Если передаточная функция системы не содержит нулей и полюсов в правой части комплексной плоскости, то такую систему называют минимально-фазовой, в противном случае считают не минимально-фазовой. Если действительная часть полюсов равна нулю, т.е. они лежат на оси $j \cdot \text{Im}$, то система находится на границе устойчивости, т.е. небольшие случайные изменения параметров системы могут перевести ее в неустойчивый режим, представляющий собой, в данном случае, экспоненциально нарастающие по амплитуде колебания.

5.3.3. Аперриодичность системы

Если импульсная характеристика системы не содержит периодических компонент, то такая система называется аперриодической. Условием аперриодичности системы является равенство нулю мнимой части полюсов передаточной характеристики:

$$\text{Im}(\alpha_i) = 0$$

Если у полюсов характеристики системы есть мнимая часть, то в импульсной характеристике будут иметься гармонические составляющие.

5.4. Частотные характеристики и частотные свойства системы

Если ЛДС имеет постоянные параметры, физически реализуема и устойчива, то ее динамические свойства можно описать при помощи частотной характеристики:

$$\dot{K}(f) = \int_0^{\infty} \omega(t) e^{-j2\pi f t} dt. \quad (5.9)$$

Нижний предел интегрирования равен 0, а не $-\infty$, так как $\omega(t) = 0$ при $t < 0$.

Частотная характеристика (5.9) представляет собой частный случай оператора передачи $W(p)$ (5.3) при замене $p = \alpha + j\omega$ на $j\omega$, т.е. при $\alpha = 0$.

Доказано, что для физически реализуемых устойчивых систем оператор передачи можно заменить частотной характеристикой без потери информации.

Частотная характеристика, в общем случае, является комплексной величиной, которую удобно представлять в виде амплитудно-частотной $A(f)$ (АЧХ) и фазо-частотной $\varphi(f)$ (ФЧХ) характеристик:

$$W(p) \Big|_{p=j\omega} = \dot{K}(f) \Big|_{\omega=2\pi f} = |\dot{K}(f)| \cdot e^{-j\varphi(f)} = A(f) \cdot e^{-j\varphi(f)}. \quad (5.10)$$

Используя понятия АЧХ и ФЧХ, частотной характеристике можно придать простую физическую интерпретацию.

Пусть на вход системы с частотной характеристикой

$\dot{K}(f)$ поступает гармонический детерминированный сигнал $x(t) = X \cdot \cos(\omega t + \varphi_x)$, существующий на бесконечном интервале времени, т.е. все переходные процессы в ЛДС завершены и система находится в установившемся режиме. Тогда процесс на выходе из системы также будет гармоническим колебанием $y(t) = Y \cdot \cos(\omega t + \varphi_y)$.

Отношение амплитуд выходного и входного процессов будет определяться значением АЧХ на данной частоте $f = \frac{\omega}{2\pi}$, т.е.

$A(f) = Y/X$, а разность фаз этих процессов определяется по ФЧХ системы

$$\varphi_y - \varphi_x = \varphi(f).$$

То есть гармонические функции типа $e^{j\omega t}$ при прохождении через ЛДС не изменяют своего вида (в установившемся режиме), а изменяют лишь свою амплитуду и фазу, что фиксируется соотношением между входом и выходом ЛДС

$$Y(f) = \dot{K}(f) \cdot X(f).$$

В инженерной практике широко используется представление $\dot{K}(f)$ как разложение на АЧХ и ФЧХ, причем АЧХ представляется в виде логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ), которая определяется как

$$L(f) = 20 \cdot \lg |\dot{K}(f)|.$$

Построение ЛАЧХ в логарифмическом масштабе по оси частот дает удобное для практики графическое представление частотных свойств системы. ФЧХ обычно выражают в градусах и строят также в логарифмическом масштабе по частоте.

5.5. Частотные характеристики многомерных систем

Многомерные (векторные) динамические системы характеризуются матрицей передаточных функций или матрицей частотных характеристик

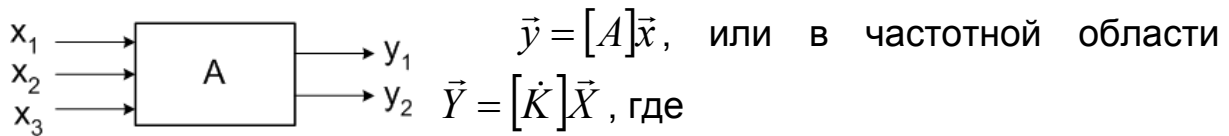


Рис. 5.3

$\dot{K} = [K_{ij}(j\omega)]$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ – матрица

размером $m \times n$ ($n > m$) частотных характеристик многомерной системы. Для простоты рассмотрим частные случаи векторных динамических систем.

а) Система с одним входом и несколькими выходами (рис.5.4) может быть представлена в виде

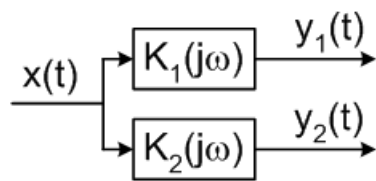


Рис. 5.4

$$\begin{aligned} \bar{X}(f) &= [X(f), 0], \\ \bar{Y}(f) &= [Y_1(f), Y_2(f)], \\ [\dot{K}] &= \begin{bmatrix} \dot{K}_1 & 0 \\ \dot{K}_2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

б) Система с одним выходом и несколькими входами (рис. 5.5) может быть представлена в виде

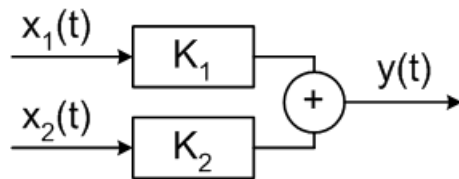


Рис. 5.5

$$\begin{aligned} \bar{X}(f) &= [X_1(f), X_2(f)], \\ [\dot{K}] &= \begin{bmatrix} \dot{K}_1 & \dot{K}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

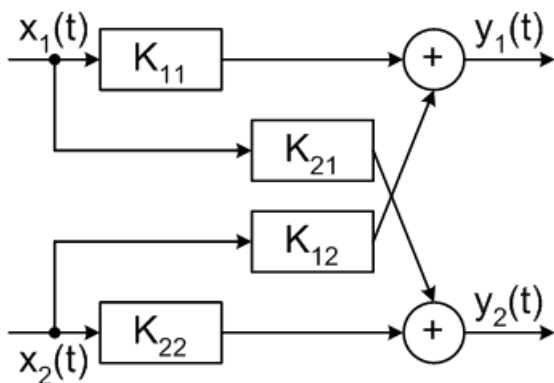


Рис. 5.6

$$\bar{y}(f) = [y(f), 0].$$

в) Система с двумя входами и двумя выходами (рис. 5.6) описывается матрицей частотных характеристик

$$[\dot{K}] = \begin{bmatrix} \dot{K}_{11} & \dot{K}_{12} \\ \dot{K}_{21} & \dot{K}_{22} \end{bmatrix}.$$

Система уравнений, описывающих работу такой системы, имеет вид:

или в матричном виде

$$\begin{cases} Y_1(p) = K_{11}(p) \cdot X_1(p) + K_{12}(p) \cdot X_2(p) \\ Y_2(p) = K_{21}(p) \cdot X_1(p) + K_{22}(p) \cdot X_2(p) \end{cases}$$

$$[Y(p)] = [K(p)] \cdot [X(p)].$$

Обратное преобразование Лапласа (или Фурье) дает

$$\vec{y}(t) = [A] \cdot \vec{x}(t),$$

где $[A]$ соответствует сверткам функций $\omega_{ij}(t)$ с входными процессами $\vec{x}(f)$:

$$\begin{cases} y_1(f) = \int_0^{\infty} \omega_{11}(t-\tau) \cdot x_1(\tau) \cdot d\tau + \int_0^{\infty} \omega_{12}(t-\tau) \cdot x_2(\tau) \cdot d\tau \\ y_2(f) = \int_0^{\infty} \omega_{21}(t-\tau) \cdot x_1(\tau) \cdot d\tau + \int_0^{\infty} \omega_{22}(t-\tau) \cdot x_2(\tau) \cdot d\tau \end{cases}$$

Оператор системы будет иметь вид

$$A_{ij} = \int_0^{\infty} \omega_{ij}(t-\tau) \cdot x_i(\tau) \cdot d\tau.$$

6. СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ ЛДС

Как было показано в предыдущем разделе, устройства, имеющие различные конструктивные исполнения и принципы работы, могут описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями. Элементы систем, классифицируемые по виду передаточных функций, называют типовыми звеньями ЛДС. Различают 7 типовых звеньев ЛДС, из них 5 физически реализуемых. Рассмотрим их основные характеристики.

6.1. Типовые звенья ЛДС

1. Безынерционное звено

Безынерционное звено имеет передаточную функцию $W(p) = k$, где k – коэффициент передачи звена. Амплитудная характеристика звена $K(f) = k$, фазовая характеристика $\varphi(f) = 0$.

Переходная характеристика $h(f) = k \cdot 1(f)$.

Импульсная характеристика $\omega(t) = k \cdot \delta(t)$.

Простейшим примером такого звена является резистивный делитель либо быстродействующий усилитель при низкочастотных входных воздействиях. Поэтому безынерционное звено при $k > 1$ называют идеальным усилителем, при $k < 1$ – делителем, а при $k = 1$ – повторителем сигналов.

2. Инерционное звено.

К инерционным звеньям относят ЛДС, имеющие передаточную функцию $W(p) = \frac{k}{1 + pT}$. Примером такого звена может служить простейшая цепь RC . Коэффициент передачи такой цепи

$K = \frac{z_2}{z_1 + z_2}$. Согласно теории цепей, $z_2 = \frac{1}{j\omega C}$, $z_1 = R$, поэтому

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

или

$$W(p) = \frac{1}{pRC + 1} \text{ при } p = j\omega,$$

т.е. $T = RC$ – постоянная времени инерционного звена, характеризующая скорость зарядно-разрядных процессов емкости в данной RC цепи.

$$\text{АЧХ} \quad K(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}},$$

$$\text{ФЧХ} \quad \varphi(f) = -\text{arctg}(\omega T).$$

Эквивалентное дифференциальное уравнение $T \cdot y' + y = kx$.

$$\text{Переходная характеристика } h(f) = k \left[1(f) - e^{-\frac{t}{T}} \right].$$

3. Интегрирующее звено.

$$\text{Передаточная функция } W(p) = \frac{k}{p}.$$

$$\text{АЧХ} \quad K(\omega) = \frac{k}{\omega}.$$

$$\text{ФЧХ} \quad \varphi(f) = -\frac{\pi}{2}.$$

Переходная характеристика $h(f) = k \cdot t \cdot 1(f)$.

Импульсная характеристика $\omega(f) = k \cdot 1(f)$.

4. Колебательное звено.

Описывает устройства и процессы, связанные с накоплением и рассеиванием энергии в системе.

$$\text{Передаточная функция звена } W(p) = \frac{k}{p^2 T^2 + 2\xi p T + 1},$$

где ξ – относительный коэффициент затухания.

$$\text{АЧХ} \quad K(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}}.$$

$$\text{ФЧХ} \quad \varphi(\omega) = -\text{arctg} \frac{2\xi \omega T}{1 - \omega^2 T^2}.$$

Переходная характеристика

$$h(t) = k \left[1(f) - e^{-\xi \frac{t}{T}} \cdot \left(\frac{\xi}{b} \sin\left(\frac{b}{T} t\right) + \cos\left(\frac{b}{T} t\right) \right) \right],$$

где $b = \sqrt{1 - \xi^2}$.

Эквивалентное дифференциальное уравнение

$$a_2 y''(f) + a_1 y'(f) + a_0 y(f) = kx(f).$$

5. Звено запаздывания.

Это звено не искажает формы входного сигнала, а сдвигает его во времени. Используется для описания задержки сигнала при его распространении из-за конечности скорости света, времени обработки сигнала в ЭВМ при наличии таковой в составе системы и т.д.

Передаточная функция $W(p) = e^{-pT}$, где T – время запаздывания.

$$\text{АЧХ} \quad k(\omega) = 1.$$

$$\text{ФЧХ} \quad \varphi(\omega) = -\omega T.$$

$$\text{Переходная характеристика } h(f) = 1(t - T).$$

$$\text{Импульсная характеристика } \omega(t) = \delta(t - T).$$

Рассмотренные звенья являются физически реализуемыми и встречаются в составе практически любых реальных систем. Для аналитического описания систем используются также звенья, созданные искусственно и физически не реализуемые. Такие модели необходимы для придания системе требуемых свойств на этапе ее синтеза. Впоследствии они заменяются реальными эквивалентными устройствами.

6. Идеальное дифференцирующее звено.

Передаточная функция $W(p) = kp$ не удовлетворяет условиям физической реализуемости, т.к. степень полинома числителя p^1 больше степени полинома знаменателя p^0 . Поэтому данное звено называют идеальным. Частотные характеристики:

$$\text{АЧХ} \quad k(\omega) = k\omega;$$

$$\text{ФЧХ} \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Переходная характеристика звена } h(t) = k\delta(t).$$

7. Дифференцирующее звено первого порядка (форсирующее)

$$\text{Передаточная функция } W(p) = k(1 + pT).$$

$$\text{АЧХ} \quad k(\omega) = k\sqrt{1 + \omega^2 T^2}.$$

$$\text{ФЧХ} \quad \varphi(\omega) = \text{arctg}(\omega T).$$

$$\text{Переходная характеристика } h(f) = k(1(t) + T\delta(t)).$$

$$\text{Эквивалентное дифференциальное уравнение } y = T \cdot x' + x.$$

6.2. Виды соединения звеньев системы

Структурная схема системы, составленная из типовых звеньев, позволяет без сложных математических вычислений находить передаточные функции различных сложных систем.

При построении моделей системы используются три вида со-

единений звеньев системы [8]:

- последовательное;
- параллельное;
- соединение с обратной связью

6.2.1. Последовательное соединение звеньев

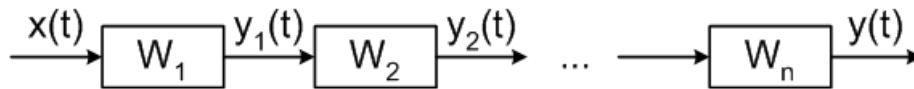


Рис. 6.1

В соответствии с определением передаточной функции можно записать, что

$$W_1(p) = \frac{Y_1(p)}{X(p)}; W_2(p) = \frac{Y_2(p)}{Y_1(p)}, \dots, W_n(p) = \frac{Y(p)}{Y_{n-1}(p)}.$$

Общая передаточная функция (5.3), откуда следует, что

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot \dots \cdot W_n(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p). \quad (6.1)$$

АЧХ последовательного соединения

$$K(\omega) = \prod_{i=1}^n K_i(\omega). \quad (6.2)$$

6.2.2. Параллельное соединение звеньев

При параллельном соединении звеньев (рис.6.2), на входы подается один и тот же сигнал $x(t)$, а выходные сигналы суммируются,

$$\begin{aligned} Y_1(p) &= W_1(p) \cdot X(p), \\ Y_2(p) &= W_2(p) \cdot X(p), \\ &\dots \\ Y_n(p) &= W_n(p) \cdot X(p). \end{aligned}$$

За счет линейности преобразования Лапласа

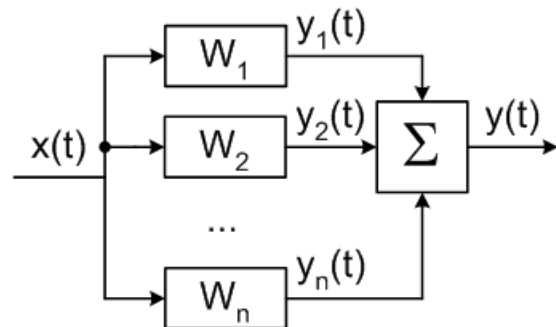


Рис. 6.2

$$Y(p) = \sum_{i=1}^n Y_i(p) = \left[\sum_{i=1}^n W_i(p) \right] \cdot X(p),$$

т.е. передаточная функция параллельного соединения звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p). \quad (6.3)$$

АЧХ, соответственно, определяется как

$$K(j\omega) = \sum_{i=1}^n K_i(j\omega). \quad (6.4)$$

6.2.3. Соединение с обратной связью (встречно-параллельное)

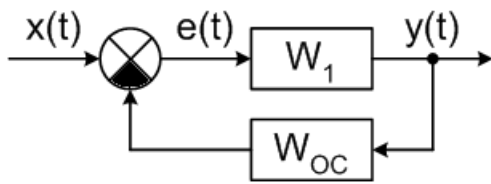


Рис. 6.3

На вход звена $W_1(p)$, охваченного обратной связью (ОС) (рис. 6.3), подается сигнал рассогласования

$$E(p) = X(p) - W_{OC}(p) \cdot Y(p). \quad (6.5)$$

В соответствии с определением передаточной функции

$$Y(p) = W_1(p) \cdot E(p). \quad (6.6)$$

Подставляя (6.5) в (6.6) получаем:

$$\begin{aligned} Y(p) &= W_1(p) \cdot [x(p) - W_{OC}(p) \cdot Y(p)] = \\ &= W_1(p)x(p) - W_1(p) \cdot W_{OC}(p) \cdot Y(p), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} Y(p) + W_1(p) \cdot W_{OC}(p) \cdot Y(p) &= W_1(p) \cdot X(p), \\ Y(p) \cdot [1 + W_1(p) \cdot W_{OC}(p)] &= W_1(p) \cdot X(p). \end{aligned}$$

Поскольку $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$, то передаточная функция соединения

с обратной связью определяется как

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_{OC}(p)}. \quad (6.7)$$

Обратная связь, изображенная на рис 6.3 называется отрицательной обратной связью. Для положительной обратной связи передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p) \cdot W_{OC}(p)}. \quad (6.8)$$

Обратная связь называется жесткой, если $W_{OC}(p) = 1$ и, следовательно,

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)}. \quad (6.9)$$

6.4. Преобразование структурных схем ЛДС

При анализе ЛДС наиболее простым методом является составление структурных схем преобразования сигналов и воздействий операторным методом. Однако такие структурные схемы для реальных объектов могут иметь сложный вид и различные перекрестные связи, не позволяющие по виду структурной схемы записать ее передаточную функцию. Для упрощения анализа сложную структурную схему можно привести к более простому виду путем эквивалентных преобразований. Цель таких преобразований – сведение системы к совокупности типовых соединений:

- последовательного;
- параллельного;
- встречно-параллельного (с ОС).

Для этого необходимо соблюдать правила преобразования структурных схем.

1. Правило переноса точки съема навстречу прохождению сигнала.

Если точка съема сигнала переносится навстречу направлению прохождения сигнала, то в переносимую ветвь необходимо включить элементы, встречающиеся по пути прохождения сигнала между прежней и новой точкой съема (рис. 6.4).

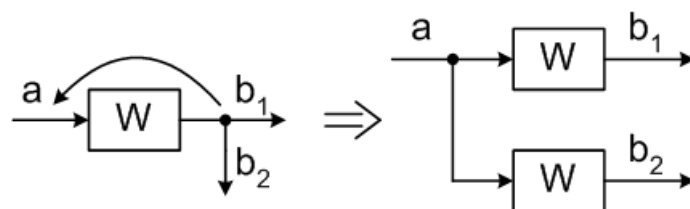


Рис. 6.4

- Правило переноса точки съема по направлению прохождения сигнала.

Если точка съема переносится по направлению прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включить элементы с обратной передаточной функцией относительно передаточной функции элементов, встречающихся на пути сигнала между новой и прежней точками съема сигнала (рис. 6.5).

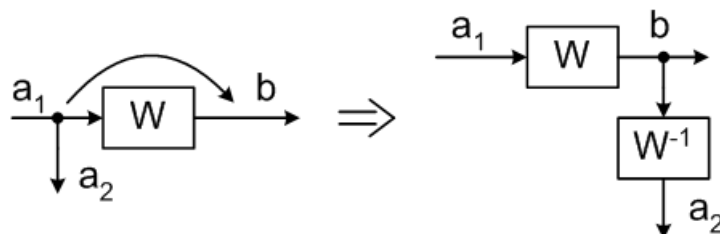


Рис. 6.5

- Правило переноса точки суммирования по направлению прохождения сигнала.

Если точка суммирования переносится по направлению прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно перенести все элементы, встречающиеся между прежней и новой точками суммирования (рис. 6.6).

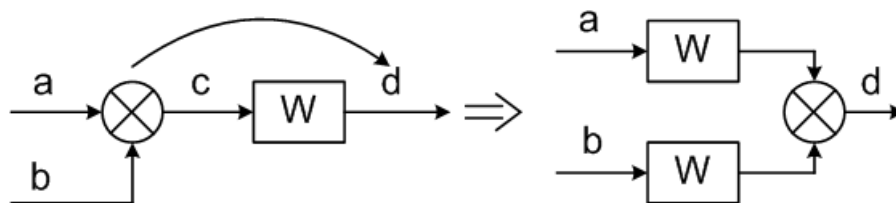


Рис. 6.6

- Правило переноса точки суммирования против направления прохождения сигнала.

Если точка суммирования переносится против направления прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включить элементы с обратной передаточной функцией (рис. 6.7).

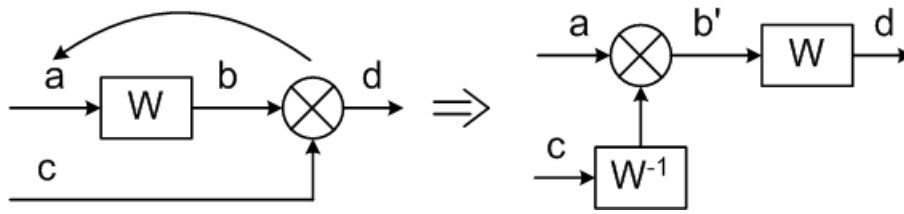


Рис. 6.7

Пример преобразования структурной модели ЛДС.

Необходимо определить передаточную функцию ЛДС, представленной на рис. 6.8.

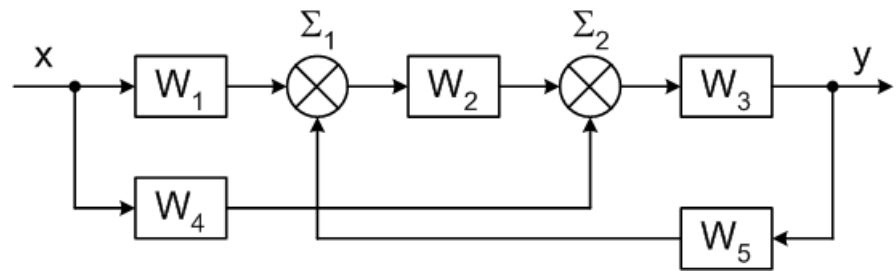


Рис. 6.8

- 1) Переносим точку суммирования Σ_1 вперед к точке Σ_2 . Соответственно элемент W_2 ставится после W_5 в цепи обратной связи, как показано на рис. 6.9.

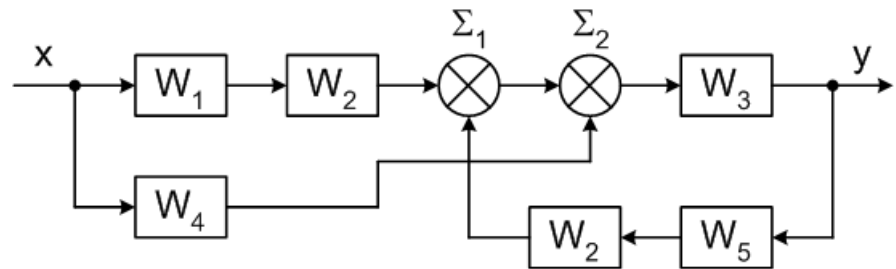


Рис. 6.9

- 2) Поскольку от перемены мест слагаемых сумма не изменится, меняем местами сумматоры Σ_1 и Σ_2 (рис. 6.10).

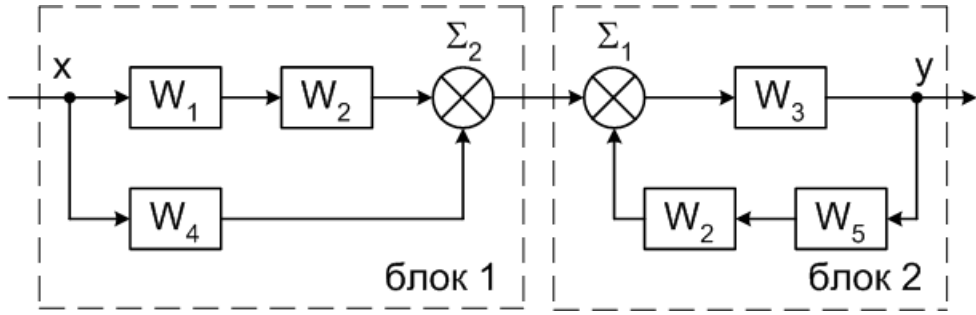


Рис. 6.10

- 3) Определяем передаточную функцию ЛДС для блока «1»:

$$W' = W_1 \cdot W_2 + W_4.$$

4) Определяем передаточную функцию для блока «2»:

$$W'' = \frac{W_3}{1 - W_3 \cdot W_2 \cdot W_5}.$$

5) Результирующая передаточная функция равна:

$$W = W' \cdot W'' = \frac{W_3(W_1 \cdot W_2 + W_4)}{1 - W_3 \cdot W_2 \cdot W_5}.$$

6.5. Синтез моделей ЛДС по заданной передаточной функции

По заданной передаточной функции может быть решена и обратная задача – синтез структурной модели ЛДС на основе типовых элементарных звеньев. При этом используется несколько методов [8].

6.5.1. Метод прямого синтеза на основе интеграторов

Пусть задана передаточная функция

$$W(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}, \quad n \geq m.$$

Разделим числитель и знаменатель на старшую степень p :

$$W(p) = \frac{b_0 \frac{1}{p^n} + b_1 \frac{1}{p^{n-1}} + \dots + b_m \frac{1}{p^{n-m}}}{a_0 \frac{1}{p^n} + a_1 \frac{1}{p^{n-1}} + \dots + a_n}.$$

Найдем $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{1}{a_n} \left\{ \begin{array}{l} X \cdot \left[b_0 \frac{1}{p^n} + b_1 \frac{1}{p^{n-1}} + \dots + b_m \frac{1}{p^{n-m}} \right] - \\ - Y \left[a_0 \frac{1}{p^n} + a_1 \frac{1}{p^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{1}{p} \right] \end{array} \right\}. \quad (6.10)$$

Структурная модель ЛДС формируется путем последовательно-

параллельного соединения интеграторов с суммированием их выходных сигналов с коэффициентами a_i, b_i . При этом требуется $2 \cdot n$ интеграторов.

6.5.2. Синтез модели на основе канонической структуры

$$\text{Задана } W(p) = \frac{\sum_{j=1}^m b_j p^j}{\sum_{i=1}^n a_i p^i} = \frac{Y(p)}{X(p)}.$$

Упростить структуру системы, уменьшив количество интеграторов в два раза, позволяет приведение передаточной функции к канонической форме путем введения вспомогательной переменной Z :

$$\frac{Y}{\sum_{j=1}^m b_j p^j} = \frac{X}{\sum_{i=1}^n a_i p^i} = Z, \quad n \geq m$$

откуда следует система уравнений

$$Y = Z \sum_{j=1}^m b_j p^j, \quad (6.11)$$

$$X = Z \sum_{i=1}^n a_i p^i. \quad (6.12)$$

В уравнении (6.12) выделим старшую производную Z и раскроем скобки:

$$Z^n = \frac{X}{a_n} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i Z^i}{a_n}$$

По полученной формуле осуществляем синтез модели по алгоритму:

- 1) пусть Z^n получено, тогда, осуществляя n -кратное интегрирование, получим все производные вспомогательной переменной Z ;
- 2) формируем $\sum a_i Z^i$;

3) формируем $\sum b_j Z^j = Y$ в соответствии с уравнением (6.11).

Одна часть схемы реализует $\frac{X}{a_n} - \sum \frac{a_i}{a_n} Z^i$ за счет обратной

связи.

Вторая часть – сборка выходного сигнала $Y = \sum b_j Z p^j$.

Пример структурной модели при $n = 2, m = 1$ представлен на рис. 6.11.

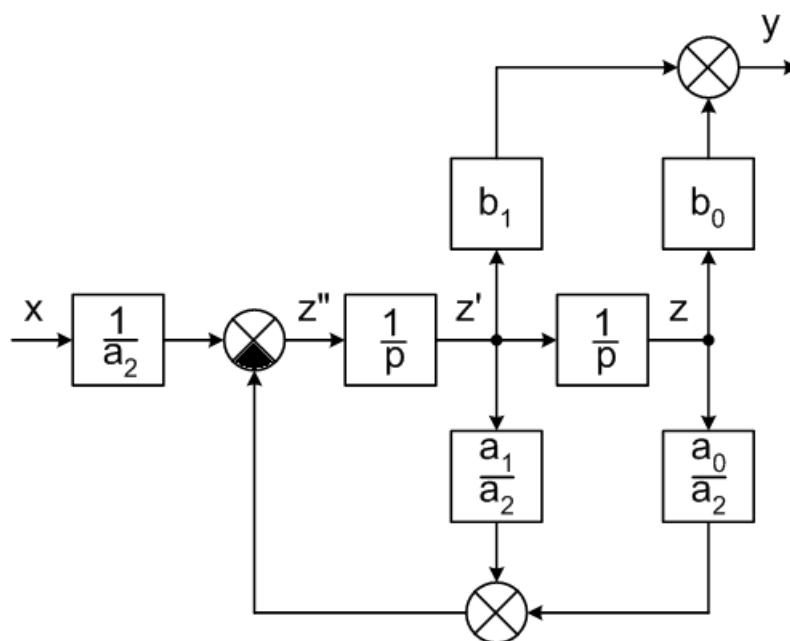


Рис. 6.11

6.5.3. Синтез модели ЛДС на основе разложения передаточной функции.

1) Известно, что дробно-рациональный полином можно разложить по корням числителя и знаменателя, а затем представить в виде произведения:

$$W(p) = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{p - \lambda_i}.$$

Если удастся определить корни полиномов числителя и знаменателя, то модель системы может быть представлена в

виде последовательного соединения звеньев $\frac{\alpha_i}{p - \lambda_i}$.

- 2) Из теории функций комплексного переменного известно, что дробно-рациональный полином комплексной переменной может быть представлен в виде суммы простейших дробей, если определены корни знаменателя:

$$W(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{p - \lambda_i}.$$

Если такое разложение удастся осуществить, то структура системы может быть представлена в виде параллельного соединения звеньев.

7. ДИСКРЕТНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Развитие средств вычислительной техники способствует широкому внедрению цифровых методов обработки сигналов, которая может осуществляться либо с помощью универсальных цифровых ЭВМ, либо с помощью специальных цифровых процессоров обработки сигналов [3,9].

Необходимость обработки сигналов в реальном масштабе времени, например, при воспроизведении аудио- и видеоинформации, требует либо высокоэффективных алгоритмов работы универсальных ЭВМ, либо применения перепрограммируемых процессоров обработки сигналов.

Преимущества цифровой аппаратуры очевидны:

- повышение точности результатов вычислений;
- отсутствие влияния окружающей среды на результаты обработки (дрейф нуля, зависимость коэффициента усиления от температуры, внешние вибрации и т.д.);
- повышенная надежность;
- уменьшение веса и габаритов;
- гибкость алгоритмов обработки и возможность их изменения и т.д.

Входной аналоговый сигнал $x(t)$ в дискретных динамических системах (ДДС) подвергается дискретизации во времени с частотой,

согласно теорем Котельникова, а в цифровых динамических системах (ЦДС) – и квантованию по уровню с помощью АЦП. Возникающими при этом шумами квантования в большинстве случаев можно пренебречь из за высокой разрядности АЦП.

Выходной сигнал ЦДС, в большинстве случаев, снова преобразуется в аналоговый вид. Если ЦДС является элементом контура управления, то возможно установление обратной связи от объекта управления, которыми могут быть механические и электромеханические устройства, электронные исполнительные органы, человек оператор.

Для систем, работающих в реальном времени, временная задержка на обработку сигнала должна быть меньше, чем интервал дискретизации сигнала $\tau < \frac{1}{f_{\partial}}$, где f_{∂} – частота дискретизации.

Данное требование следует из теоремы Котельникова и позволяет обосновать такой параметр, как быстродействие ЭВМ либо специального сигнал-процессора. Для решения данной задачи при проектировании системы может быть определена полоса пропускания $W(p)$ системы в целом, т.е. установлена максимально возможная частота в спектре сигналов, а по ней – частота дискретизации.

7.1. Модели ЦДС

Дискретный сигнал на входе ЦДС (ЭВМ) представляется в виде совокупности отсчетов исходного сигнала $x(t)$, дискретизированного импульсной последовательностью $\delta(t)$ с шагом дискретизации Δt :

$$x_k = x(t) \cdot \delta(t - k\Delta t), \quad k = 1 \dots N,$$
$$x_{\partial}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - k\Delta t). \quad (7.1)$$

Преобразование Лапласа от такой импульсной последовательности является дискретным преобразованием:

$$L(x_{\partial}(t)) = L\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - k\Delta t)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n\Delta t)e^{-pn\Delta t} = X(p).$$

Заменой переменных $z = e^{p\Delta t}$ можно перейти от дискретного преобразования Лапласа к Z -преобразованию:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n\Delta t) \cdot z^{-n}. \quad (7.2)$$

Свойства Z -преобразования были рассмотрены ранее. Основными свойствами Z -преобразования являются:

1) линейность

$$Z\{a_1x_1 + a_2x_2\} = a_1Z[x_1] + a_2Z[x_2];$$

2) свойство смещения

$$Z[x(t - k\Delta t)] = Z^{-k}x(Z),$$

где $x(Z) = Z\{x(t)\}$;

3) свойство свертки: если Z -преобразование сигнала $y(t)$ можно представить в виде произведения $X_1(Z)$ и $X_2(Z)$:

$$Y(Z) = X_1(Z) \cdot X_2(Z),$$

то

$$y[n] = Z^{-1}(Y(Z)) = \sum_{m=0}^n X_1[m-n] \cdot x[m],$$

где $y(n\Delta t) = y[n]$ – значение отсчета сигнала $y(t)$ в момент времени $n\Delta t$.

Поскольку ЦДС преобразует входную последовательность отсчетов x_n в выходную y_n , то, воспользовавшись свойством свертки, можно определить передаточную функцию ЦДС как

$$W(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} \quad \text{и} \quad Y(Z) = W(Z) \cdot X(Z).$$

Соответственно

$$y[n] = Z^{-1}\{Y(Z)\} = \sum_{m=0}^n x[n-m] \cdot \omega[m] = \sum_{m=0}^n x[m] \cdot \omega[m-n],$$

где $\omega[m]$ – дискретная импульсная характеристика цифровой систе-

мы.

Если аналоговые ЛДС описывались дифференциальными уравнениями (5.2) $\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = \sum_{j=0}^m b_j x^{(j)}$, то дискретные динамические системы могут описываться линейными разностными уравнениями

$$\sum_{i=0}^n a_i y[n-i] = \sum_{j=0}^m b_j x[m-j], \quad (7.3)$$

являющимися дискретным аналогом дифференциального уравнения.

Z -преобразование от разностного уравнения с учетом свойства сдвига будет иметь вид

$$Y(Z) \sum_{i=0}^n a_i Z^{-i} = X(Z) \sum_{j=0}^m b_j Z^{-j},$$

откуда

$$W(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j Z^{-j}}{\sum_{i=0}^n a_i Z^{-i}}. \quad (7.4)$$

Таким образом, дискретные линейные динамические системы описываются характеристиками, аналогичными характеристикам аналоговых динамических систем, записанным в терминах Z -преобразования, соответствующего дискретному преобразованию Лапласа. При этом используется переход от оператора интегрирования p преобразования Лапласа к переменным Z -преобразования вида

$$\frac{1}{p} \div \frac{\Delta t Z}{Z-1}.$$

Соответствие оператора $\frac{1}{p^k}$ преобразования Лапласа Z -преобразованию приведено в таблицах Z -преобразования [10,11].

7.2. Синтез цифровых фильтров на основе моделей ЦДС

Моделью цифровых динамических систем является линейное разностное уравнение (7.3) и Z -изображение передаточной функции дискретной системы (7.4)

На основании этой модели методом Z -преобразования может быть получен дискретный рекуррентный алгоритм моделирования системы. Этот алгоритм предполагает вычисление текущего отсчета переменной $y[i]$ по ее предыдущим отсчетам и отсчетам входной переменной $x[i]$. Цифровое устройство, реализующее данный алгоритм моделирования, называется цифровым фильтром (ЦФ) [3].

Допустим, на основе $W(p)$ или линейного разностного уравнения системы методом Z -преобразования получено следующее уравнение системы:

$$Y(Z) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{j=0}^m b_j X(Z) Z^{-j} - \sum_{i=0}^n a_i Y(Z) Z^{-i} \right]. \quad (7.5)$$

Данное уравнение позволяет построить рекурсивный фильтр, реализующий заданную (исходную) функцию $W(p)$.

Поскольку оператор Z^{-k} означает задержку сигнала на k тактов дискретизации Δt , структурная схема устройства, реализующего заданную передаточную функцию, имеет вид представленный на рис. 7.1

Такой фильтр называется рекурсивным, его структура называется прямой, т. к. реализована прямо по уравнению системы. Этот класс фильтров характеризуется бесконечной импульсной характеристикой, поэтому их называют БИХ – фильтрами [1,3].

Если в разностном уравнении (7.3) все коэффициенты a_i , $i = 1, N$ равны нулю, то уравнение системы принимает вид:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k], \quad (7.6)$$

а структура фильтра имеет вид, приведенный на рис 7.2.

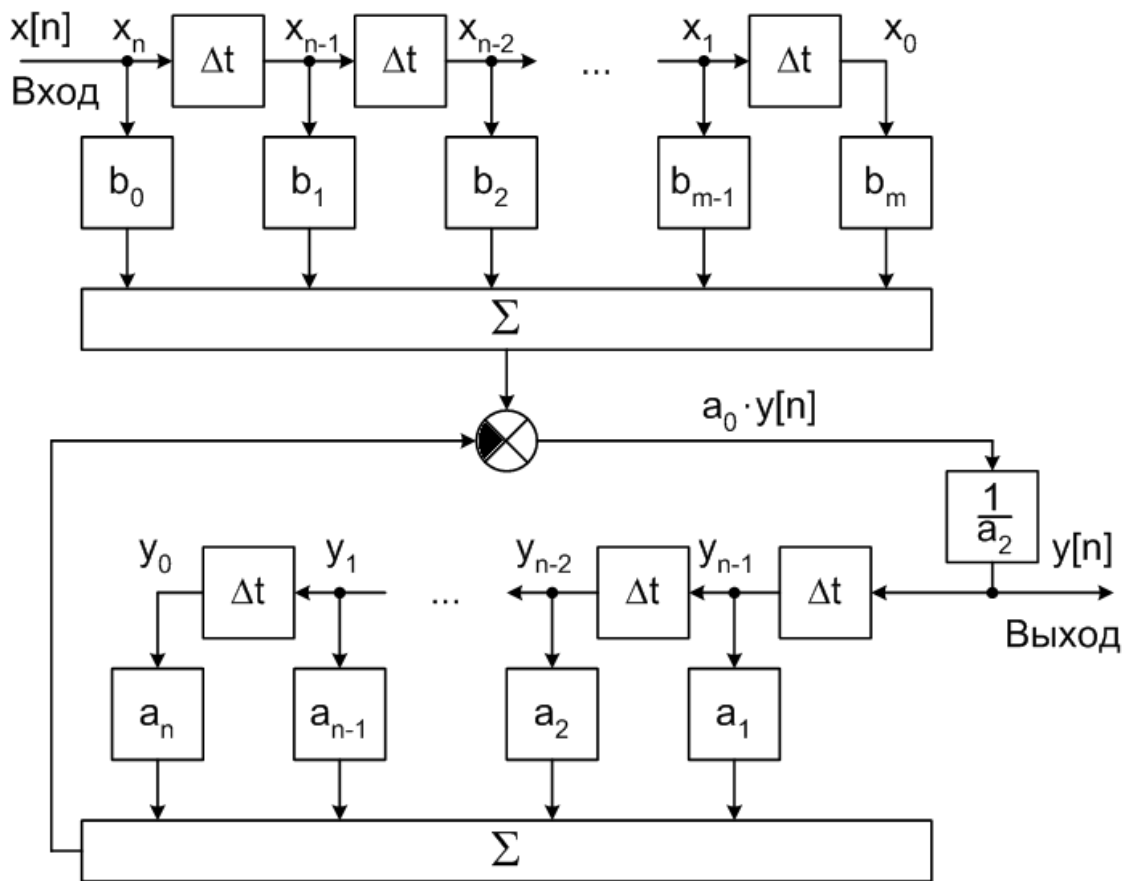


Рис. 7.1

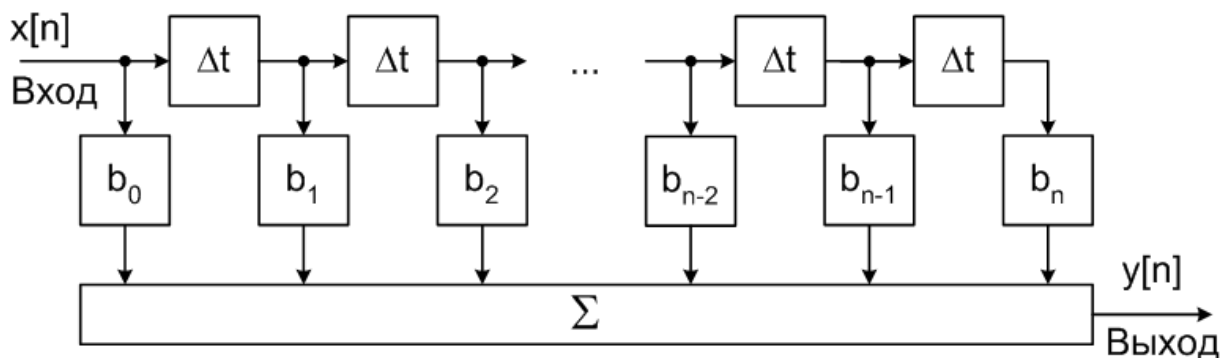


Рис. 7.2

Такие фильтры называют нерекурсивными или трансверсальными, а также фильтрами с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры) [1,3]. При этом весовые коэффициенты КИХ-фильтра b_i совпадают с отсчетами его импульсной характеристики, т.к. уравнение фильтра (7.6) может быть представлено в виде:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N w[k] \cdot x[n-k],$$

что соответствует выражению для дискретной свертки.

Существует несколько форм реализации рекурсивных фильт-

ров:

- прямая (рассмотренная выше);
- каноническая;
- последовательная;
- параллельная.

7.2.1. Каноническая форма ЦФ

Получается путем введения вспомогательной переменной $U(Z)$ и представлением передаточной функции (7.4) в виде

$$\frac{Y(Z)}{\sum_{j=0}^m b_j Z^{-j}} = \frac{X(Z)}{\sum_{i=0}^n a_i Z^{-i}} = U(Z).$$

Тогда обратное Z -преобразование дает

$$\begin{cases} u[n] = x[n] - \sum_{i=1}^n a_i u[n-i] \\ y[n] = \sum_{j=0}^m b_j u[n-j] \end{cases}, \quad (7.7)$$

на основании чего может быть синтезирована каноническая структура рекурсивного фильтра, подобная приведенной на рис. 7.1.

7.2.2. Последовательная форма ЦФ

Основана на передаточной функции (7.4) представленной в виде произведения одностепенных сомножителей

$$W(Z) = \prod_{i=0}^n W_i(Z). \quad (7.8)$$

Тогда ЦФ может быть реализован в виде последовательного соединения одностепенных звеньев.

7.2.3. Параллельная форма ЦФ

Основана на разложении $W(Z)$ (7.4) по корням полинома знаменателя:

$$W(Z) = \sum_{i=0}^n W_i(Z). \quad (7.9)$$

Тогда структура фильтра будет иметь вид параллельного соединения однотипных звеньев.

Параллельная (7.9) и последовательная (7.8) структуры ЦФ обеспечивают более высокую точность решения, чем рекурсивные (7.5), (7.7), особенно при ограниченной разрядности цифрового кода.

8. ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ

Характеристики реальных устройств, строго говоря, практически всегда нелинейны. При моделировании реальные устройства зачастую идеализируют, представляя их в виде линейных динамических систем с целью упрощения анализа. Однако, в ряде случаев, приходится учитывать их нелинейный характер.

Одномерные нелинейные статические системы характеризуются видом зависимости реакции системы на входное воздействие $y = f(x)$.

Например:

- характеристика полупроводникового диода почти квадратичная: $y \approx x^2, x > 0$;
- характеристика магнитных материалов сердечников катушек индуктивности, трансформаторов, магнитных головок магнитофонов и т. д. – петля гистерезиса;
- характеристика усилительных элементов с зоной нечувствительности (кремниевые транзисторы, механизмы с пружиной, люфт редуктора и т.д.)

$$y = \begin{cases} 0, & x \in [-d, d] \\ k(x - d), & x > 0 \\ k(x + d), & x < -d \end{cases} ;$$

- характеристика с насыщением, которой обладают все усилительные устройства;

- дискретно-линейная характеристика – характеристика аналого-цифрового преобразователя.

Если в структуре системы имеется хотя бы один нелинейный элемент, система считается нелинейной. Для таких систем не выполняется принцип суперпозиции, искажается спектральный состав входных воздействий (появляются спектральные составляющие высших порядков), существенно искажается закон распределения входного воздействия.

Если, например, ЛДС не искажает характера нормального закона распределения, то на выходе нелинейных систем происходит денормализация закона распределения, существенно изменяется его форма [7].

Путем эквивалентных преобразований структурной схемы системы нелинейную систему можно разделить на нелинейную безынерционную часть и линейную динамическую подсистему.

Преобразование структуры ЛДС было рассмотрено в п. 6.4. Для нелинейных элементов системы также возможны эквивалентные преобразования [8]:

- последовательное соединение нелинейных элементов;
- параллельное соединение $y = N_1(x) + N_2(x)$;
- обратная связь $y = N(x)$

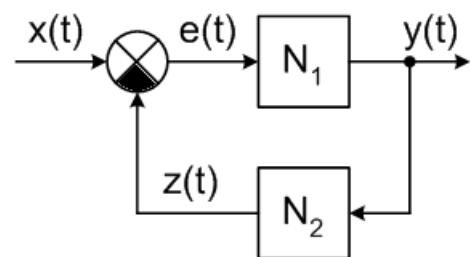


Рис. 8.1

(рис. 8.1), для которой:

- 1) по зависимости $Z = N_2(y)$ найти $y = N_2^{-1}(z)$;
- 2) $\varepsilon = x - z$, откуда $x = \varepsilon + z$, $z = x - \varepsilon$,
 $y = N_1(\varepsilon)$, откуда $N_2^{-1}(z) = N_1(\varepsilon)$;
- 3) по заданному y находятся z и e , и определяется x как $x = N^{-1}(y)$. Таким образом получаем зависимость $y = N(x)$.

8.1 Методы анализа нелинейных систем

8.1.1. Метод формальной линеаризации

В соответствии с теоремой Вейерштрасса любая функция $y = f(x)$, непрерывная на ограниченном интервале, может быть с любой точностью аппроксимирована полиномом вида

$$y = \sum_{i=0}^n g_i x^i. \quad (8.1)$$

Если $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$; $\vec{g} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{bmatrix}$, то такая нелинейная зависимость

может быть представлена в векторном виде

$$y = \vec{g}^T \vec{x}. \quad (8.2)$$

Этот искусственный прием позволяет одномерную нелинейную систему представить в виде многомерной линейной.

8.1.2. Метод кусочно-линейной аппроксимации

Для нелинейных систем, допускающих аппроксимацию нелинейной характеристики отрезками прямых, для каждого линейного участка характеристики записываются свои линейные дифференциальные уравнения, либо соответствующие интегральные уравнения.

В точке излома результаты решения различных дифференциальных уравнений "сшиваются": значение переменной в конце линейного участка принимается за начальное значение для следующего участка.

8.1.3. Метод гармонической линеаризации

Используется для анализа возможности возникновения автоколебаний в системе. Он основан на аппроксимации нелинейности из условия равенства амплитуд первых гармонических составляющих сигнала. Используется в том случае, когда линейная часть системы является низкочастотным фильтром, подавляющим гармоники выше первой. Для этого случая строится линейная передаточная функция нелинейного элемента по первой гармонике. Для остальных гармонических составляющих определяется только их общая энергия.

8.1.4. Метод статистической линеаризации нелинейных систем

Используется при анализе свойств нелинейных систем при случайных входных воздействиях $x(t)$.

Нелинейное преобразование $y = N(x)$ заменяется таким линейным преобразованием, которое сохраняет основные статистические характеристики исходного. Допустим $x(t) = m_x + \dot{x}(t)$, где $x(t)$ – центрированный случайный процесс. Нелинейное преобразование $y = N(x)$ изменит характеристики случайного процесса:

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} N(x) f(x) dx; \quad (8.3)$$

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} N^2(x) f(x) dx. \quad (8.4)$$

Представим $N(x)$ в виде

$y = k_0 m_x + k_{11} \dot{x}$ и потребуем выполнения условия:

$$m_y = k_0 m_x$$

$$D_y = k_{11}^2 D_x,$$

где k_0, k_{11} – коэффициенты статической линеаризации.

В более строгой постановке требуют $M\{(y - N(x))^2\} \rightarrow \min$, т.е. необходимо найти такие коэффициенты линеаризации, при которых минимален средний квадрат отклонений. Обычно коэффициенты статической линеаризации находят численными методами с использованием методов статистического моделирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высш. шк., 1988. – 448 с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
3. Бондарев В.Н., Трестер Г., Чернега В.С. Цифровая обработка сигналов: методы и средства. – Севастополь: СевГТУ, 1999. – 398 с.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Высш. шк., 2000. – 480 с.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Высш. шк., 2000. – 383 с.
6. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных /Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
7. Пугачев В.С. Теория случайных функций. – М.: Физматгиз, 1960. – 883 с.
8. Вагапов В.Б. Основы автоматизации радиоэлектронных систем. – К.: Вища шк., 1995. – 358 с.
9. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1971. – 328 с.
10. Методы машинного моделирования в проектировании электронной аппаратуры /М.Ф. Бабаков, А.В. Попов. - Учеб. пособие. - Харьков: Нац. аэрокосмический ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2002. – 89 с.
11. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности электронных средств /М.Ф. Бабаков, А.В. Попов. -Учеб. пособие по лабораторному практикуму - Харьков: Гос. аэрокосмический ун-т "Харьк. авиац. ин-т ", 2000. – 167 с.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	3
1. МЕТОДОЛОГИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ АППАРАТОВ И СИСТЕМ	4
1.1. Системный подход к проектированию электронных аппаратов и систем	4
1.2. Классификация систем	7
1.3. Роль математического моделирования в процессе проектирования электронных аппаратов и систем	10
2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ И ВОЗДЕЙСТВИЙ	14
2.1. Гармонические процессы	15
2.2. Полигармонические процессы	18
2.3. Почти периодические процессы	20
2.4. Переходные процессы	21
3. ДИСКРЕТНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ	24
3.1. Дискретизация процессов	24
3.2. Преобразование спектра при дискретизации процессов	26
3.3. Ортогональные преобразования при обработке и моделировании сигналов	29
3.3.1. Преобразование Фурье	30
3.3.2. Дискретное и быстрое преобразование Фурье	31
3.3.3. Преобразование Уолша – Адамара	33
3.3.4. Дискретное преобразование Лапласа	34
3.3.5. Z-преобразование	35
4. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ И ВОЗДЕЙСТВИЙ.	36
4.1. Модели дискретных случайных величин	36
4.1.1. Биноминальный закон распределения	37
4.1.2. Закон Пуассона	38
4.2. Модели непрерывных случайных величин	39
4.2.1. Равномерный закон распределения	41
4.2.2. Экспоненциальное распределение	42
4.2.3. Закон распределения Симпсона (треугольный ЗРВ)	42
4.2.4. Закон распределения арксинуса	43
4.2.5. Закон распределения Рэлея	44
4.2.6. Нормальный закон распределения	44

4.3. Вероятностные модели многомерных случайных величин	45
4.3.1. Многомерный закон распределения	46
4.3.2. Корреляция	47
4.3.3. Многомерный нормальный закон распределения	50
4.4. Декоррелирующие преобразования случайных величин	52
4.5. Функциональные преобразования случайных величин	54
4.6. Функциональные преобразования многомерных законов распределения	56
4.7. Модели вероятностных процессов	59
4.7.1. Основные характеристики случайных процессов	59
4.7.2. Классификация типов процессов	62
4.7.3. Характеристики стационарных процессов	63
4.7.4. Модели частных случаев случайных процессов	66
4.7.5. Случайные процессы с дискретным временем	68
5. МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ	71
5.1. Линейные статические системы	71
5.2. Модели линейных динамических систем (ЛДС)	73
5.3. Основные свойства ЛДС	76
5.3.1. Физическая реализуемость ЛДС	76
5.3.2. Устойчивость ЛДС	76
5.3.3. Апериодичность системы	78
5.4. Частотные характеристики и частотные свойства системы	78
5.5. Частотные характеристики многомерных систем	79
6. СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ ЛДС	81
6.1. Типовые звенья ЛДС	81
6.2. Виды соединения звеньев системы	84
6.2.1. Последовательное соединение звеньев	85
6.2.2. Параллельное соединение звеньев	85
6.2.3. Соединение с обратной связью (встречно-параллельное)	86
6.4. Преобразование структурных схем ЛДС	87
6.5. Синтез моделей ЛДС по заданной передаточной функции	90
6.5.1. Метод прямого синтеза на основе интеграторов	90
6.5.2. Синтез модели на основе канонической структуры	91
6.5.3. Синтез модели ЛДС на основе разложения передаточной функции	92
7. ДИСКРЕТНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ	93
7.1. Модели ЦДС	94

7.2. Синтез цифровых фильтров на основе моделей ЦДС	97
7.2.1. Каноническая форма ЦФ	99
7.2.2. Последовательная форма ЦФ	99
7.2.3. Параллельная форма ЦФ	99
8. ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ	100
8.1 Методы анализа нелинейных систем	102
8.1.1. Метод формальной линеаризации	102
8.1.2. Метод кусочно-линейной аппроксимации	102
8.1.3. Метод гармонической линеаризации	103
8.1.4. Метод статистической линеаризации нелинейных систем	103
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	105

Михаил Федорович Бабаков
Анатолий Владиславович Попов
Михаил Иванович Луханин

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
ЭЛЕКТРОННЫХ АППАРАТОВ И СИСТЕМ**

Редактор

Св. план,

Подписано в печать

Формат 60×84/16. Бум. офс. № 2. Офс. печ.

Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Т. 100 экз. Заказ Цена свободная

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского

"Харьковский авиационный институт"

61070, Харьков – 70, ул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Издательский центр "ХАИ"

61070, Харьков – 70, ул. Чкалова, 17

izdat@khai.edu