

И. К. Васильева, А. В. Попов, П. Е. Ельцов

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ГЕОИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ**

2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского
"Харьковский авиационный институт"

И. К. Васильева, А. В. Попов, П. Е. Ельцов

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ГЕОИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ**

Учебное пособие

Харьков «ХАИ» 2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского
"Харьковский авиационный институт"

И. К. Васильева, А. В. Попов, П. Е. Ельцов

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ГЕОИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ**

Учебное пособие

Харьков «ХАИ» 2014

УДК 004.942 (075.8)

B19

Наведено теоретичні основи, методи й алгоритми комп'ютерного моделювання під час проектування складних систем. Розглянуто загальні принципи й основні етапи імітаційного моделювання, методи генерування випадкових подій, величин і процесів, методики планування, проведення й оброблення даних повного факторного експерименту. Особливу увагу приділено практичним питанням реалізації алгоритмів у пакеті Mathcad.

Для студентів напрямку підготовки «Геодезія і землепорядкування» при виконанні лабораторних робіт з дисциплін «Математичні методи і моделі», «Методи розпізнавання образів», «Моделювання техногенних ситуацій з використанням геоінформаційних технологій», при розробленні курсових і дипломних проектів.

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. В. А. Батаев,
д-р техн. наук, проф. Р. Э. Пащенко

Васильева, И. К.

B19 Математическое моделирование в геоинформационных системах [Текст]: учеб. пособие / И. К. Васильева, А. В. Попов, П. Е. Ельцов. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского "Харьк. авиац. ин-т", 2014. – 100 с.

Приведены теоретические основы, методы и алгоритмы компьютерного моделирования при проектировании сложных систем. Рассмотрены общие принципы и основные этапы имитационного моделирования, методы генерирования случайных событий, величин и процессов, методики планирования, проведения и обработки данных полного факторного эксперимента. Особое внимание уделено практическим вопросам реализации алгоритмов в пакете Mathcad.

Для студентов направления подготовки «Геодезия и землеустройство» при выполнении лабораторных работ по дисциплинам «Математические методы и модели», «Методы распознавания образов», «Моделирование техногенных ситуаций с использованием геоинформационных технологий», при разработке курсовых и дипломных проектов.

Ил. 35. Табл. 4. Библиогр.: 13 назв.

УДК 004.942 (075.8)

© Васильева И. К., Попов А. В.,
Ельцов П. Е., 2014

© Национальный аэрокосмический
университет им. Н. Е. Жуковского
"Харьковский авиационный институт", 2014

ВВЕДЕНИЕ

Методы компьютерного моделирования широко применяются во всех сферах деятельности человека. Классические объекты моделирования – информационные, производственные, транспортные и другие логистические системы, используемые для решения задач проектирования, управления, реконструкции и долгосрочного планирования. Одной из наиболее важных целей моделирования при этом является оценка показателей функционирования исследуемых систем. На современном этапе прикладных исследований сложной системы, содержащей множество связей между элементами, с разнообразными нелинейными ограничениями и большим количеством параметров, с учетом влияния случайных факторов, наиболее широко распространен метод имитационного моделирования. Суть этого метода состоит в том, что процесс функционирования сложной системы представляется в виде определенного алгоритма, который и реализуется на ЭВМ. По результатам реализаций можно сделать те или иные выводы относительно исходной системы, например спрогнозировать ее будущие состояния в зависимости от избираемых стратегий управления, оценить эффекты входных воздействий и внешних влияющих факторов на поведение (функционирование) системы, установить способы усовершенствования моделируемой системы.

Главная ценность имитационного моделирования состоит в том, что в его основу положена методология системного анализа. Это позволяет исследовать проектируемую или анализируемую систему методами операционного анализа, включающего в себя такие взаимосвязанные этапы:

- постановка задачи;
- разработка концептуальной модели;
- разработка и программная реализация имитационной модели;
- проверка адекватности модели и оценка точности результатов моделирования;
- планирование и проведение экспериментов;
- формирование управляющих воздействий или альтернатив решения исходной проблемы.

Благодаря этой методологии имитационное моделирование можно использовать как универсальный подход при принятии решений в условиях неопределенности и учета в моделях трудноформализуемых факторов, а также применять основные принципы системного подхода при решении практических задач.

Материалы пособия могут быть использованы студентами при изучении дисциплин «Моделирование техногенных ситуаций с использованием геоинформационных технологий», «Математические методы и модели», «Методы распознавания образов», при выполнении лабораторных работ, связанных с имитационным и компьютерным моделированием, а также при подготовке курсовых и дипломных проектов.

1. ГЕОИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ. ОЦЕНКА РИСКОВ

Геоинформационная система (ГИС) – это автоматизированная информационная система, предназначенная для обработки пространственно-временных данных, основой интеграции которых служит географическая информация. ГИС объединяют в единый комплекс методы и технологии обработки данных автоматизированных систем научных исследований, систем автоматизированного проектирования (САПР), автоматизированных справочно-информационных систем, систем автоматизированного управления и практически всех автоматизированных систем общего назначения. Интеграционный характер ГИС позволяет создавать на их основе мощный инструмент для сбора, хранения, систематизации, анализа и представления информации. Все это делает ГИС незаменимыми для обеспечения принятия решений по оптимальному управлению в различных областях человеческой деятельности: в производстве, транспорте, навигации, геологии, географии, экономике, военном деле, экологии и т. д. В связи с большим значением экспертных задач, решаемых с помощью ГИС, возрастает роль входящих в них экспертных систем.

Широкие возможности предоставляют ГИС также для моделирования различных процессов и объектов. При этом в ГИС находят применение максимальное количество методов и процессов моделирования, используемых в других автоматизированных системах.

Математическое моделирование в ГИС включает в себя:

- построение проекта карты на основе методологии САПР;
- проекционные преобразования;
- геометрический анализ (определение расстояний, длин ломаных линий, расчет площадей, поиск точек пересечения линий и др.);
- анализ сетей;
- преобразование форм представления данных, в том числе различные виды интерполяции, например, построение непрерывных полей по дискретным значениям переменных;
- цифровое моделирование рельефа.

Особое значение имеет блок моделирования распределения полей концентрации загрязняющих веществ на основе общих показателей работы промышленных объектов или других источников загрязнения и степени их воздействия на окружающую среду. Такие расчеты необходимы при анализе неблагоприятной экологической ситуации в регионе для выявления ее виновников или при прогнозировании экологической обстановки при вводе в действие или реконструкции источников антропогенного воздействия на окружающую среду и определении размера затрат на уменьшение количества вредных выбросов.

Таким образом, технология ГИС позволяет собрать воедино и проанализировать различную информацию об окружающей среде, что дает возможность прогнозирования и оценки техногенных рисков.

Техногенный риск обусловлен существованием техносферы.

Техносфера – часть биосферы, коренным образом преобразованная человеком в технические и техногенные объекты (механизмы, здания, сооружения и т. д.) с помощью прямого или косвенного воздействия технических средств в целях наилучшего соответствия социально-экономическим потребностям человека.

В зависимости от степени своей работоспособности техногенный объект может находиться в различных состояниях. Выделяют несколько возможных для объекта ситуаций:

- нормальные условия работы (эксплуатации);
- нарушение нормальных условий работы (эксплуатации);
- проектная аварийная ситуация;
- запроектная аварийная ситуация;
- гипотетическая авария.

Нормальные условия эксплуатации соответствуют проектным режимам производства или другого вида функционирования на данном объекте, предусмотренным плановым регламентом его работы.

Нарушение нормальных условий эксплуатации вызывается любым отклонением от планового регламента работы, которое требует остановки объекта или его части для ликвидации отклонения, но не связано с задействованием систем технологической безопасности.

Проектная аварийная ситуация возникает при появлении исходных событий (предпосылок, условий), ведущих к авариям, возможность которых предусмотрена при проектировании соответствующего производства (сложной технической системы, техногенного объекта). При этом для таких случаев разрабатывают специализированные системы технологической безопасности, рассчитанные на последствия этих проектных аварий, исходя из одного возможного отказа технологического оборудования или одной ошибки оператора.

Зaprоектными считаются аварии, вызванные не учтенными для проектных аварий исходными событиями (предпосылками), вероятность которых меньше, чем вероятность исходных событий для проектных аварий, а также обусловленные дополнительными отказами оборудования, в том числе в системах безопасности. Для запроектных аварий не предусматриваются технологические меры обеспечения безопасности объекта.

Гипотетические аварии относятся к числу запроектных аварийных ситуаций и характеризуются весьма малой вероятностью такого события, но значительными последствиями.

Техногенная чрезвычайная ситуация – состояние, при котором в результате воздействия источника чрезвычайной ситуации (ЧС) на объекте, определенной территории или акватории нарушаются нормальные условия жизни и деятельности людей, возникает угроза их жизни и здоровью, наносится ущерб имуществу населения, народному хозяйству и окружающей природной среде.

Потенциально опасные объекты можно классифицировать по признаку характера чрезвычайных ситуаций, которые могут на них возникнуть:

– I группа: транспортные системы (железнодорожные, автотранспортные, авиационные, морские, речные, транспортные, космические и трубопроводные);

– II группа: пожаровзрывоопасные объекты;

– III группа: химически опасные объекты;

– IV группа: радиационно опасные объекты;

– V группа: биологически опасные объекты;

– VI группа: гидродинамически опасные объекты;

– VII группа: объекты инфраструктуры по обеспечению жизнедеятельности хозяйственных объектов и жизнеобеспечению населения.

Практически для всех сложных и сверхсложных технических систем в составе техноэкосистем важными оказываются две группы факторов риска. Первая из них связана с воздействием опасных природных явлений (землетрясения, наводнения, ураганы и т.п.) на исследуемую техническую систему, вторая – со штатным и нештатным воздействием технической системы на окружающую среду, в том числе и на различные экосистемы.

Одна из основных характеристик любой чрезвычайной ситуации, характеризующей ее последствия, – масштаб, который определяется, прежде всего, размерами зоны ЧС. Также учитывают тяжесть последствий, основными составляющими которых являются потери и ущерб.

Потери – выход из строя людей (гибель, ранения, травмы, болезни).

Ущерб отражает материальный и финансовый урон, нанесенный в процессе чрезвычайной ситуации. Он бывает прямой и косвенный.

Прямой ущерб обусловлен поражающими воздействиями, приводящими к разрушениям, повреждениям, выходу из строя объектов хозяйственного и социального назначения, утрате имущества, нанесению вреда природной среде, природным ресурсам.

Косвенный ущерб возникает из-за остановки хозяйственной деятельности, упущенной выгоды, необходимости затрат на ликвидацию ЧС и ее долговременных последствий. Иногда, несмотря на малые размеры зоны чрезвычайной ситуации, тяжесть ее последствий может быть весьма значительной и трагичной. Оценка масштаба ЧС включает в себя и учет возможных косвенных последствий: нарушение организационных, социальных, экономических, политических, этнических, культурных и других важных связей, действующих порой на расстояниях, значительно превосходящих размеры зоны ЧС. В свою очередь масштаб чрезвычайной ситуации предопределяет состав сил и средств, количество привлеченных ресурсов, позволяющих ликвидировать чрезвычайную ситуацию.

Широко используемой характеристикой опасности является риск.

Риск – это измеренная возможность того, что ход событий, действия и результаты деятельности приведут к последствиям, негативно воздействующим на человеческие ценности.

Оценка риска – процесс, используемый для определения величины (меры) риска анализируемой опасности для здоровья человека, материальных ценностей, окружающей природной среды и других объектов, связанных с реализацией опасности. Процедура оценки риска основывается на методах математической статистики и теории вероятностей. Как правило, понятие риска связывают с возможностью наступления сравнительно редких событий. При этом риск отождествляют с вероятностью $P(t)$ наступления этих событий за интервал времени t (например, за год).

Вероятность $P(t)$ – мера (показатель) риска, удобная для сравнения рисков для одного объекта (субъекта) от различных событий или для различных объектов (субъектов) в типовых для них условиях функционирования (деятельности).

Риск связывают также с размером ущерба от опасного события в натуральном (количество пострадавших и погибших, размер зоны действия опасных факторов) или стоимостном выражении. Таким образом, риск сочетает в себе вероятность неблагоприятного события и объем негативных последствий этого события (убытки, потери, ущерб).

В статистическом направлении оцениваются некие средние по времени и пространству характеристики ущербов от различных техногенных причин или инцидентов. Также оцениваются частота (вероятность) самих инцидентов, аварий, катастроф, средний ущерб на один инцидент и т. п.

Из множества статистических характеристик по техногенным рискам наиболее часто используются:

- частота инцидентов определенной категории (например, катастроф на железнодорожном транспорте) в год на определенной территории, 1/год;

- средний материальный ущерб за один инцидент для определенной территории, например, в млн. дол./инцидент;

- средний натуральный ущерб за один инцидент для определенной территории, например, среднее количество пролившейся нефти в тоннах/инцидент;

- индивидуальный риск летального исхода, связанный с техническим источником, 1/год;

- индивидуальный риск здоровью, 1/год.

Индивидуальные риски летального исхода и здоровью используются для оценки среднего количества умерших или заболевших конкретным заболеванием в год на данной территории от данного техногенного фактора. Эти средние значения получаются умножением индивидуального риска на количество людей в группе риска.

Использование данного подхода предполагает получение достаточного количества данных об ущербах техногенного характера за определенный период времени для определенных территорий. В дальнейшем эти данные подвергаются статистической обработке усреднения по простран-

ству и времени и используются для прогноза будущих значений техногенных рисков.

При вероятностном подходе изучаемой случайной величиной является потенциальный ущерб, который полностью характеризуется своей плотностью распределения вероятностей $f(x)$ или функцией распределения вероятностей $F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi.$$

В теории рисков наиболее часто используются такие законы распределений: равномерное, экспоненциальное, нормальное, биномиальное и распределение Пуассона.

Для оценки случайного потенциального ущерба используют такие вероятностные числовые характеристики:

– начальные моменты распределения k -го порядка

$$m_k = M_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx; \quad (1.1)$$

– математическое ожидание (МО) – первый начальный момент, характеризующий среднее значение случайной величины:

$$m_x = m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx; \quad (1.2)$$

– центральные моменты распределения k -го порядка

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x) dx; \quad (1.3)$$

– дисперсия – второй центральный момент, характеризующий разброс случайной величины относительно ее среднего значения:

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx \quad (1.4)$$

или среднеквадратическое отклонение (СКО)

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}; \quad (1.5)$$

– асимметрия

$$\beta_1 = \mu_3 / \sigma_x^3; \quad (1.6)$$

– эксцесс

$$\beta_2 = (\mu_4 / \sigma_x^4) - 3. \quad (1.7)$$

Наиболее общим показателем риска считается математическое ожидание (среднее значение) ущерба от опасного события за год. Если в течение года может произойти более одного опасного события, то показателем риска служит сумма ущербов от всех событий. Поэтому в задачах, связанных с выбором среди проектов, характеризующихся соответствующими рисками, в первую очередь сравнивают математические ожидания. Выбор делают в пользу меньшего математического ожидания (рис. 1.1, а; $m_1 < m_2$).

При одинаковых МО сравнивают дисперсии или соответствующие СКО. Выбор делают в пользу меньшей дисперсии (или СКО), потому что чем больше среднеквадратические отклонения, тем более вероятны значительные ущербы (рис. 1.1, а; $\sigma_2 < \sigma_1$).

Асимметрия показывает степень сдвига моды плотности распределения вероятности к нулю по сравнению со случаем нормального распределения. При положительной асимметрии сдвиг наблюдается к нулю ущерба, при отрицательной – в сторону роста ущерба (рис. 1.1, б). Выбор делают в пользу больших положительных значений β_1 .

Экссесс показывает степень остроты или плоскости функции плотности распределения вероятностей относительно нормального распределения. Положительные значения эксцесса свидетельствуют о более островершинном распределении, чем нормальный закон, а отрицательные – о более плоском распределении (рис. 1.1, в). Выбор делают в пользу больших положительных эксцессов.

Для изучения проектных и запроектных инцидентов с участием технических систем используют детерминистический и вероятностный подходы. В первом предусматривается анализ последовательности развития инцидента, начиная от исходного события через последовательность предполагаемых стадий отказов, деформаций и разрушения компонентов до установившегося состояния. Ход аварийного процесса изучается и предсказывается с помощью математического и физического моделирования, для чего проводятся многочисленные лабораторные и натурные эксперименты.

Детерминистический подход позволяет выявить причины инцидентов, разработать методы защиты на уровне конструктивных решений, снизить вероятность наступления инцидента за счет выбора материалов и проектных решений. Недостатки этого метода – сложность, высокая стоимость, вероятность пропуска важного фактора риска, недооценка случайных составляющих риска.

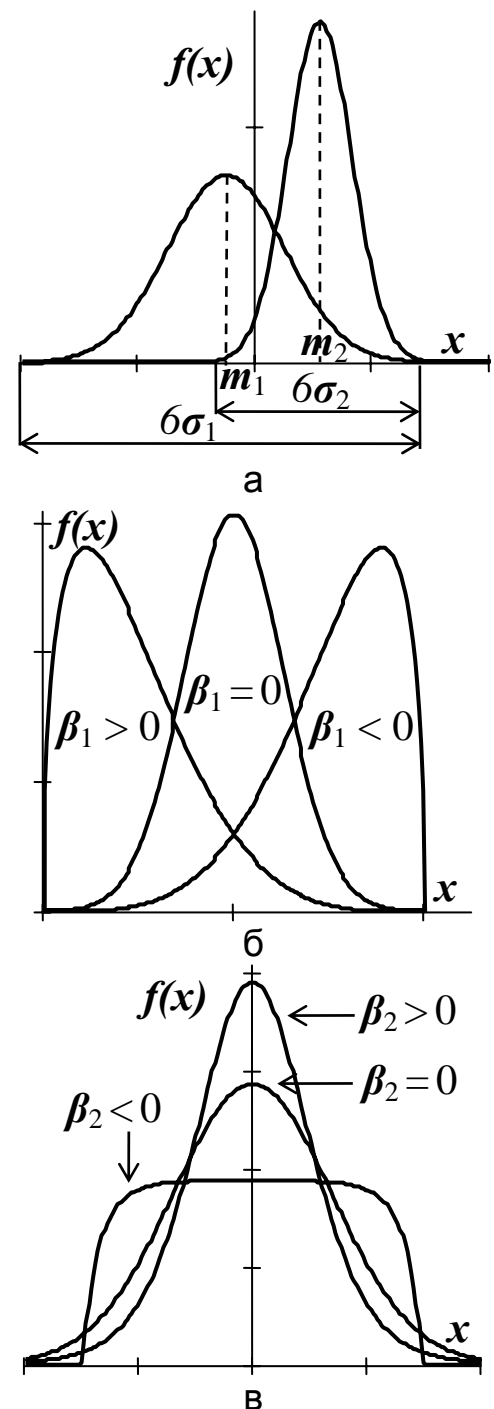


Рис. 1.1. Примеры плотностей распределений с различными числовыми характеристиками: а – МО и СКО; б – асимметрия; в – эксцесс

В вероятностном анализе оценивают вероятность возникновения инцидента, проводят расчет вероятности того или иного сценария инцидента, анализируют разветвленные и пересекающиеся цепочки событий. Расчетные модели при этом оказываются существенно упрощенными по сравнению с детерминистическим подходом и соответствующими моделями. В этих случаях широко применяют метод построения дерева отказов, СП-анализ («событие - причина») и метод Монте-Карло (метод статистического моделирования).

Таким образом, в отличие от метода статистических характеристик, все остальные методы оценки техногенных рисков основываются на моделировании исследуемой технической системы. Эта модель может учитывать разные существенные факторы, в том числе и взаимное влияние окружающей среды и технической системы.

Контрольные вопросы

1. Что такое ГИС? Перечислите основные задачи и функциональные возможности ГИС.
2. Какие объекты называют техногенными? Приведите примеры техногенных объектов и ситуаций.
3. Дайте определение техногенной чрезвычайной ситуации. Приведите примеры техногенных ЧС и опасных природных явлений, укажите возможные причинно-следственные связи между ними.
4. Для выбранной ЧС укажите объекты и субъекты опасности. Что будет являться прямым и косвенным ущербом в случае реализации данной ЧС?
5. Что является характеристиками опасных ситуаций?
6. С чем связаны факторы риска для сложных технических систем? Дайте пояснение понятию «техногенный риск».
7. Назовите критерии оценки риска.
8. Какие существуют методы оценки техногенных рисков?
9. Чем вероятностный анализ техногенных ситуаций отличается от детерминистического и что для них является общим?
10. Что именно характеризуют математическое ожидание, дисперсия, асимметрия и эксцесс? Для заданной плотности распределения вероятности $f(x)$ определите значения m_x , D_x , β_1 , β_2 .
11. Изобразите вид (форму) плотности распределения вероятности $f(x)$ для разных комбинаций знаков коэффициентов асимметрии и эксцесса, например $\{\beta_1 < 0; \beta_2 > 0\}$ или $\{\beta_1 = 0; \beta_2 < 0\}$.
12. Постройте дерево событий, приводящих к некоторой ЧС. Считая, что вероятности событий-причин известны, рассчитайте вероятность возникновения анализируемой ЧС.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Моделирование – это способ исследования каких-либо явлений, процессов или объектов путем построения и анализа их моделей.

Основными понятиями в теории и практике моделирования являются «модель» и «система».

Система – совокупность взаимосвязанных объектов, компонентов или элементов произвольной природы, образующих некоторую целостность в том или ином контексте.

Теоретико-множественное определение системы

$$S = \langle X_S, R_S \rangle,$$

где X_S, R_S – множества элементов системы и отношений между ними.

Признаками того, что моделируемый объект следует рассматривать как систему, являются:

– эмерджентность (от англ. emergence – появление, выявление) – система как совокупность элементов обладает новыми свойствами, не присущими ни одному из ее элементов и не сводящимися к сумме свойств элементов системы;

– многомодельность – для анализа системы необходимо привлечение многих теорий и научных дисциплин, например, схемотехники, механики, теории тепломассообмена, теории электромагнитного поля и т. п.;

– структурная сложность – система включает в себя большое количество элементов с различными связями между ними, разнообразными физико-химическими процессами и множеством иерархических уровней;

– сложный характер функционирования – множество возможных состояний системы при функционировании, сложный характер перехода из одного состояния в другое, наличие неопределенности, связанной с текущим состоянием системы и влиянием внешней среды.

При рассмотрении той или иной системы исходным этапом ее изучения является определение ее *границы*. Речь идет о необходимости разделения всех элементов на два класса: принадлежащих и не принадлежащих системе. При этом те объекты, которые принадлежат системе, и будут являться ее элементами. Напротив, не принадлежащие системе объекты, но оказывающие на нее то или иное влияние, образуют *среду* или внешнюю по отношению к системе предметную область. Предположение о том, что граница системы четко определена, является одним из принципов системного анализа.

Важнейшими характеристиками любой системы являются ее структура и процесс функционирования.

Под *структурой системы* понимают устойчивую во времени совокупность взаимосвязей между ее элементами или компонентами. Эти взаимосвязи могут отражать в том числе и вложенность одной системы (*подсистемы*) в другую, более крупную систему (*метасистему*).

Структура системы может быть описана с разных точек зрения. Наиболее общее представление о структуре дает схема устройства системы. При этом взаимодействие элементов может носить не только механический, электрический или биологический характер, но и информационный, что характерно для современных организационно-технических систем.

Процесс функционирования системы тесно связан с изменением свойств системы или отдельных ее элементов во времени. При этом важной характеристикой системы является ее *состояние* – множество значений свойств или признаков системы, которые в каждый момент времени t_i отражают наиболее существенные особенности поведения системы. Какое-либо изменение этих значений можно рассматривать как переход системы из состояния $s_j(t_i)$ в новое состояние $s_k(t_{i+1})$.

Систему можно изучать и анализировать, изменяя входные воздействия и наблюдая за выходами. Это кибернетический подход, в соответствии с которым техническая система рассматривается как "черный ящик", выполняющий некоторую функцию преобразования информации в условиях внешних воздействий (рис. 2.1).

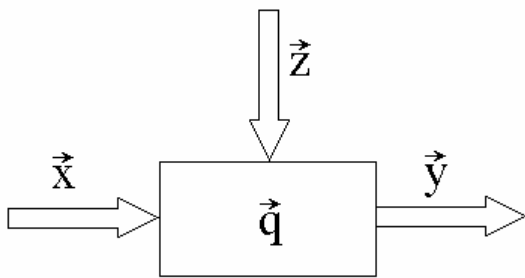


Рис. 2.1. Кибернетическая модель системы

На рис. 2.1 показаны:

– \vec{x} – множество входных воздействий, поступающих в систему;

– \vec{z} – множество внешних, связанных с окружающей средой, факторов, воздействующих на систему. Эти факторы могут быть контролируемыми или неконтролируемыми, управляемыми или неуправляемыми, детерминированными или случайными;

– \vec{q} – множество внутренних параметров системы, в том числе состояния системы в предыдущие моменты времени;

– \vec{y} – вектор выходных параметров – реакция системы на входные воздействия и внешние факторы:

$$\vec{y}(\rho) = A\{\vec{x}(\rho), \vec{q}(\rho, \vec{z})\}, \quad (2.1)$$

где $A(\bullet)$ – оператор системы (функция преобразования информации, выполняемая системой); ρ – некоторый функционал, например время t , частота f , координата d (расстояние, пространственное положение) и т. д.

По наличию данных об операторе $A(\bullet)$ системы разделяют на такие:

1) система типа "черный ящик" – оператор $A(\bullet)$ полностью неизвестен и восстанавливается в процессе проектирования экспериментальным путем за счет обработки векторов \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} ;

2) система типа "серый ящик" – оператор $A(\bullet)$ известен частично,

например с точностью до параметров \vec{q} , т. е. известно аналитическое выражение $A=f(\vec{q})$, а параметры \vec{q} – неизвестны;

3) система типа “белый ящик” – известны и вид оператора $A(\bullet)$, и значения параметров \vec{q} .

По типу оператора $A(\bullet)$ системы разделяют по совокупности их свойств, таких, как физическая реализуемость, стохастичность, векторность, линейность, инерционность, стационарность, распределенность, автономность и др.

В *физически реализуемых системах* выходная реакция системы формируется по текущему и предыдущим значениям входного воздействия. В *физически нереализуемых системах* для определения выходной реакции системы в текущий момент времени требуется знание будущих значений входного сигнала.

Для *детерминированных систем* существует однозначное соответствие между входным и выходным сигналами $y=A(\vec{x})$.

В *вероятностных (стохастических) системах* значение выходного сигнала может быть предсказано по значению входного сигнала только с некоторой определенной вероятностью $P(\vec{y}|\vec{x})=f(A(\vec{x}))$. Причиной этой неопределенности могут быть:

- изменение внутренних параметров \vec{q} по случайному закону;
- случайные изменения структуры системы;
- влияние внешних факторов случайного характера \vec{z} .

По количеству входов и выходов различают одномерные (скалярные) и многомерные (векторные) системы. В *одномерных системах* входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ процессы – скалярные величины: $y=A(x)$.

Систему считают *многомерной*, если хотя бы один из процессов $\vec{x}(t)$, $\vec{y}(t)$ является векторным. Система может быть векторной по входу, например $y(t)=x_1(t)+x_2(t)$, по выходу, например $y_1(t)=a \cdot x(t)$, $y_2(t)=b \cdot x(t)$, либо иметь много входов и выходов, каким-либо образом связанных друг с другом (рис. 2.2).

Линейные системы в отличие от нелинейных подчиняются принципу суперпозиции

$$y = A \left\{ \sum_k (a_k \cdot x_k) \right\} = \sum_k (a_k \cdot A\{x_k\}).$$

У *безынерционных (статических) систем* выходной сигнал в некоторый момент времени зависит только от значения входных сигналов в тот же момент времени.

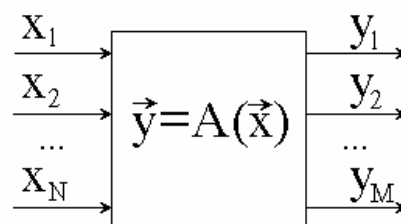


Рис. 2.2. Многомерная система

Инерционные (динамические) системы обладают "памятью о прошлом": значение выходного сигнала в некоторый момент времени зависит от значений входного сигнала в тот же момент и от значений входного и выходного сигналов в предшествующие моменты времени.

В *стационарных системах* сдвиг входного сигнала во времени приводит к такому же сдвигу выходного сигнала $x(t + \tau) \rightarrow y(t + \tau)$, в то время как в *нестационарных системах* выходной сигнал зависит от момента подачи входного сигнала, т. е. $A = A(\bullet, t)$.

В *системах с распределенными параметрами* реакция системы зависит не только от времени, но и от координат. Такую систему описывают дифференциальными уравнениями в частных производных по времени и пространству.

Системы с сосредоточенными параметрами описывают обыкновенными дифференциальными уравнениями; реакция этих систем зависит только от времени.

Автономными называют системы, у которых отсутствует входное воздействие: $x(t) \equiv 0$, $y(t) = A(\vec{q}, \vec{z})$.

В *неавтономных* системах реакция системы определяется не только внутренним состоянием, но и входным сигналом: $y(t) = A(\vec{q}, x(t))$.

Модель (от латинского *modus* – копия, образ, очертание) – это материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования свойства оригинала.

Математическая модель – приближенное описание какого-либо класса явлений или объектов реального мира на языке математики. В общем случае ее можно представить в виде системы функционалов

$$\Phi_i(X, Y, Z; t) = 0,$$

где X – вектор входных переменных, $X = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]$; Y – вектор выходных переменных, $Y = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_M(t)]$; Z – вектор внешних воздействий, $Z = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_K(t)]$; t – время.

По принципам построения математические модели разделяют на аналитические и имитационные.

В *аналитических моделях* процессы функционирования реальных объектов, процессов или систем записывают в виде явных функциональных зависимостей. Как правило, для этого используют дифференциальные, интегральные и алгебраические уравнения и системы уравнений.

По мере усложнения объекта моделирования построение аналитической модели превращается в трудноразрешимую проблему. Тогда необходимо использовать более гибкий метод моделирования – *имитационное моделирование*, при котором функционирование объектов, процессов или систем описывают набором алгоритмов. Алгоритмы имитируют реальные элементарные явления, составляющие процесс или систему, с

сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени.

В зависимости от характера исследуемых процессов и систем математические модели могут быть детерминистические и стохастические. В *детерминистических* моделях предполагается отсутствие всяких случайных воздействий, элементы модели (переменные, математические связи) точно установлены, поведение системы можно точно определить. *Стохастическая* модель учитывает случайный характер процессов в исследуемых объектах, который описывается методами теории вероятности и математической статистики.

По виду входной информации модели разделяют на непрерывные и дискретные. Если информация и параметры непрерывны, а математические связи устойчивы, то модель – *непрерывная*. Если информация и параметры дискретны, а связи неустойчивы, то и модель – *дискретная*.

Статические модели описывают поведение объекта, процесса или системы в какой-либо фиксированный момент времени. *Динамические* модели отражают поведение объекта, процесса или системы во времени.

Контрольные вопросы

1. Что такое система? Назовите основные характеристики системы. Приведите пример системы с указанием ее структуры, элементов и свойств.

2. Каким образом можно описать структуру и процесс функционирования системы?

3. Что представляет собой кибернетическая модель системы?

4. Чем различаются между собой системы типа «черный ящик», «серый ящик» и «белый ящик»?

5. По каким признакам можно классифицировать системы?

6. Что определяет физическую реализуемость системы?

7. По математической записи принципа суперпозиции дайте трактовку его сути.

8. Можно ли считать систему стохастической, если на ее вход поступает детерминированный входной сигнал? Если да – за счет чего возникает неопределенность? Если нет – укажите, что требуется для такого предположения.

9. Являются ли понятия «статический» и «стационарный» равнозначными? Если нет – в чем отличие?

10. Чем автономные системы отличаются от неавтономных?

11. Приведите примеры многомерных систем.

12. Что такое математическая модель?

13. Какие виды моделей Вы знаете? Чем будете руководствоваться при выборе вида модели?

3. МЕТОДЫ И ЭТАПЫ РАЗРАБОТКИ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

По результатам системного анализа наиболее эффективным методом проектирования имитационных моделей является такой, который объединяет нисходящее и итерационное проектирование.

При *итерационном методе проектирования* путем множества итераций добиваются соответствия модели целям проектирования; это метод «проб и ошибок», предусматривающий последовательные циклические изменения, в результате которых получают модель, удовлетворяющую требованиям точности и адекватности.

В основе *нисходящего проектирования* лежит принцип последовательной детализации, или декомпозиции. Он состоит в постепенном уточнении абстрактного описания системы, в процессе которого на каждом этапе построения модели задают определенный уровень детализации отображения системы. На первом этапе проектирования строят наиболее общую одноуровневую модель системы, с помощью которой оценивают только основные показатели ее работы. На следующем этапе некоторые блоки модели описывают более детально. Так можно достичь большой точности и адекватности модели в целом.

При выборе первоначального варианта модели используют метод аналогии, который основывается на знании характеристик компонентов системы и принятых решениях в подобных случаях. Методы внесения изменений в модель основываются на принципе направленного исследования. Для его применения в пространстве параметров модели можно построить гиперповерхность ее показателей точности и оптимизировать или хотя бы улучшить эти показатели. Если результаты сравнения модели и реальной системы неудовлетворительны, то необходимо сформулировать ряд гипотез о причинах несоответствия. Гипотезы целесообразно формулировать для нескольких уровней представления модели:

- описание структуры;
- алгоритмы поведения;
- параметры и входные данные.

Поиск причин несоответствия начинают с уровня входных данных, для чего оценивают чувствительность модели к их изменениям. Если незначительное изменение входных данных приводит к существенному изменению выходных, то необходимо уточнить входные данные и (или) локализовать блоки модели, влияние на которые максимально. Устранение причин такой сильной зависимости может потребовать изменения структуры модели путем замены отдельных блоков на более детализированные, что приведет к изменению внутренних параметров модели и алгоритмов функционирования.

Параметрическая наладка модели требует поиска оптимальных параметров, при которых степень несоответствия между моделью и системой будет минимальна.

Алгоритмы поведения системы можно изменять локально (для отдельных блоков) или для модели в целом. Такие изменения требуют более детального изучения поведения моделируемой системы и могут привести к изменению уровней детализации в модели.

Изменить структуру модели сложнее, чем наладить параметры, так как это может привести к глобальным изменениям модели и ее замене новой.

Этапы построения имитационной модели:

- формулировка проблемы и постановка задачи;
- разработка концептуальной модели;
- программная реализация имитационной модели;
- проверка правильности и достоверности модели;
- организация, планирование и проведение экспериментов;
- принятие решений по результатам моделирования.

Имитационная модель должна решать некоторую комплексную проблему, состоящую из нескольких задач, например, анализ работы системы приема, передачи и обработки информации, выбор комплекса технических средств обработки информации, анализ времени обработки запросов и распределения ресурсов в системе. Поэтому на *этапе формулировки проблемы* необходимо, прежде всего, установить цели моделирования. Затем проводят анализ объекта моделирования (системы или процесса): определяют конфигурацию системы, вектор состояния, т. е. множество параметров, характеризующих состояние системы, входные и выходные переменные, их взаимосвязи, внешние влияния на систему, основные критерии функционирования системы и ограничения при исследовании. Устанавливают критерии оценки модели целям моделирования, рассматривают такие показатели, как масштаб модели, необходимые ресурсы, программное обеспечение.

Следующий этап – разработка *концептуальной модели*. Так называют абстрактную модель, выявляющую причинно-следственные связи, присущие исследуемому объекту в тех пределах, которые определены целями исследования. Это формальное описание объекта моделирования, отражающее концепцию, т. е. точку зрения исследователя, его понимание проблемы.

При разработке концептуальной модели необходимо:

- сформировать целевые функции (критерии качества) моделируемой системы;
- выбрать степень детализации модели;
- описать входные, выходные переменные и параметры модели;
- привести функциональные зависимости, которые описывают поведение переменных и параметров;
- указать ограничения на возможные изменения величин;
- разработать структурную схему концептуальной модели и составить описание ее функционирования.

Выбор степени детализации описания объекта зависит от целей моделирования, заданных ограничений и требуемой точности выходных данных \vec{y} . Для оценки уровня детализации можно использовать такие показатели:

- отношение реального времени к модельному, т. е. соотношение между временем моделирования с заданным набором данных и временем работы реальной системы с тем же набором данных;
- разрешающую способность модели – минимальный интервал времени между последовательными событиями, которые фиксируются при моделировании.

Уровень детализации должен быть неодинаков для всей модели: он выше для тех частей, для которых предполагается большая зависимость точности результатов моделирования от выбранной точности описания. С повышением уровня детализации возрастает способность модели точно воспроизводить поведение системы, конфигурация которой или входные данные для которой не были предусмотрены на этапе построения модели.

При разработке концептуальной модели существенными являются выделение и описание *состояний* объекта. Состояние системы определяется непрерывными или дискретными значениями характеристик ее элементов. Динамику поведения системы задают путем описания переходов ее из одного состояния в другое в пространстве состояний. Причины изменения состояния могут задаваться аналитически как детерминированные или случайные функции времени. Состояния системы могут изменяться непрерывно или в дискретные моменты времени, что определяет выбор для описания поведения системы непрерывных или дискретных математических моделей.

Выбор входных \vec{x} и внутренних \vec{q} переменных осуществляют в соответствии с уровнем детализации разных частей модели, с учетом возможных изменений и доступности первичных данных. Эти данные можно получить из технической и конструкторской документации, официальных отчетов, статистических сборников, справочников. Также можно использовать эмпирические данные, экспертные оценки, результаты анкетирования. При этом следует учитывать, что генерирование случайных величин и процессов с заданными распределениями эффективнее, чем просто использование табличных данных.

Формализация – это логико-математическое описание моделируемой системы с учетом динамики ее функционирования. Части модели, которые можно описать математически, подают в виде аналитических зависимостей. Другие части модели представляют собой детальное словесное описание или алгоритм функционирования.

Для описания концептуальной модели можно использовать структурные схемы, диаграммы состояний, потоковые диаграммы, стохастические сети, ориентированные графы и др. (рис. 3.1, 3.2).

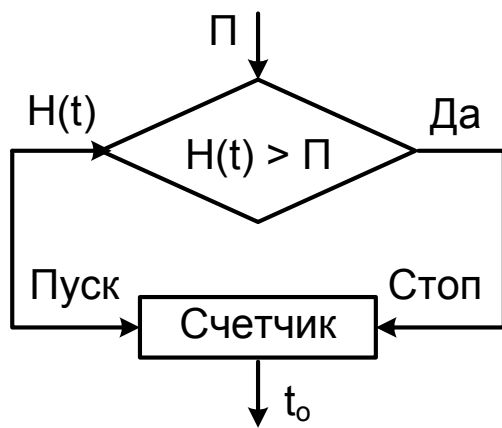


Рис. 3.1. Схема моделирования внезапных отказов по условию превышения уровня нагрузки $H(t)$ заданного уровня прочности Π : t_0 – время наработки до отказа

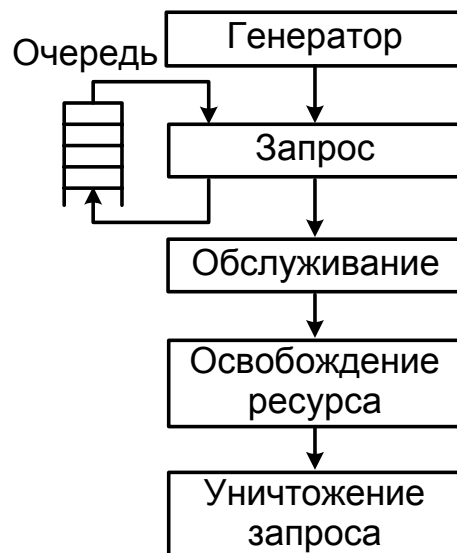


Рис. 3.2. Схема моделирования системы массового обслуживания

На рис. 3.1: нагрузка $H(t)$ – нормальный стационарный случайный процесс; Π – постоянное допустимое значение прочности.

Согласно условию отказа по схеме «нагрузка – прочность»

$$H(t) \geq \Pi$$

моделью отказа является пересечение уровня Π первым выбросом процесса $H(t)$. Если уровень Π существенно превышает математическое ожидание процесса $H(t)$, то последовательность моментов пересечений образует пуассоновский поток случайных событий. Значение интервала времени от начала моделирования до момента пересечения фиксируют и по результатам серии из N экспериментов получают выборку реализаций случайного времени наработки до отказа $\{t_{oi}\}, i = 1 \dots N$.

По схеме (рис. 3.2) моделируют события, обуславливающие переходы устройства обслуживания в состояния «свободно» – «занято»: случайные моменты поступления запросов, длительности времени обслуживания, которые вычисляют или генерируют на основе заданного статистического распределения. Изменение состояния устройства определяется наступлением определенного события, а начало выполнения действия (активности, работы) – выполнением определенных условий. Так, ЕСЛИ поступил запрос И ресурс – свободный, ТО начать обслуживание запроса И изменить состояние ресурса на «занято». ЕСЛИ во время обслуживания поступает новый запрос, ТО поставить его в очередь. ЕСЛИ время обслуживания истекло, ТО состояние ресурса – «свободно». ЕСЛИ в очереди есть запросы, ТО выбрать для обслуживания один из них согласно принятым правилам организации очереди (например, FIFO – первым пришел – первым обслужили, LIFO – последним пришел – первым обслужили, RANDOM – случайный выбор, а также выбор запросов с учетом их приоритетов).

Модель системы разрабатывают для получения некоторой новой информации о системе-оригинале в целях решения исходной проблемы. Базовым объектом для получения такой информации является программная модель сложной системы, реализованная на одном из языков программирования или построенная с использованием соответствующих программных инструментов.

На *этапе программной реализации* логическую схему модели преобразуют в программу, при этом большое внимание уделяют разработке алгоритмов и численных методов решения задачи на ЭВМ, с помощью которых результат может быть найден с необходимой точностью и за приемлемое время.

На *этапе проверки* выясняют, согласуются ли результаты моделирования с теоретическими сведениями или эмпирическими данными в пределах определенной точности. Результаты проверки используют для модификации модели (это либо усложнение модели, чтобы она была более адекватной действительности, либо ее упрощение ради достижения практически приемлемого решения) или решают вопрос о применимости построенной модели для проектирования либо исследования заданных процессов или систем.

Реализация *этапа проведения экспериментов с моделью* означает выполнение серии экспериментов с программной моделью системы на той или иной вычислительной платформе. При этом содержание процесса организации, планирования и проведения экспериментов отражает такая последовательность действий:

- формирование конкретных значений наборов исходных данных (входных переменных), которые характеризуют отдельный вычислительный эксперимент с программной моделью системы;
- выполнение расчетов или (в общем случае) выполнение отдельной итерации с имитационной моделью системы в целях получения конкретных значений выходных переменных модели;
- оценка точности полученных результатов;
- интерпретация полученных результатов в форме управляющих воздействий или альтернатив решения исходной проблемы.

Этапы моделирования взаимосвязаны, а сама процедура построения модели – итерационная: после выполнения каждого этапа необходимо проверить правильность и достоверность полученных результатов и если они не соответствуют ожидаемым значениям – вернуться к предыдущим этапам для корректировки и подстройки модели.

В результате выполнения этапов моделирования изменяются формы представления моделируемого объекта: формальное описание проблемы → концептуальная модель → математическая модель → алгоритм моделирования → программная реализация модели → результаты моделирования → интерпретация полученных результатов на языке данной предметной области.

Таким образом, технология моделирования начинается с определения проблемы и заканчивается представлением результатов. Проверки и тестирования позволяют идентифицировать и исправлять качественные неточности на всех этапах моделирования путем циклического повторения тех этапов, где эти неточности были обнаружены.

Контрольные вопросы

1. В чем суть итерационного метода проектирования?
2. В чем состоит принцип декомпозиции системы?
3. Для одной и той же системы изобразите две структурные схемы, которые отличаются уровнем детализации.
4. Как выбрать первоначальный вариант модели системы?
5. Перечислите уровни представления модели.
6. Назовите этапы построения имитационной модели. В какой последовательности эти этапы необходимо выполнять, чтобы получить адекватную модель?
7. Объясните различие между понятиями «задача» и «проблема».
8. Что такое концептуальная модель? Что нужно знать об объекте моделирования для построения концептуальной модели?
9. Приведите примеры формального описания концептуальной модели.
10. Чем определяется выбор уровня детализации описания объекта?
11. Какие способы описания входных и выходных переменных модели Вам известны?
12. Как и зачем выполняют оценку чувствительности модели к значениям входных переменных?
13. В чем состоит параметрическая наладка модели?
14. Каким образом описывают состояния объекта?
15. Пусть по результатам наблюдений при фиксированных значениях входного воздействующего фактора x_i получен ряд значений выходного параметра объекта $y(x_i)$.

x_i	0	2	4	6	8
$y(x_i)$	0	0,5	1,0	1,6	2,4

Какую из предлагаемых моделей

- а) $y(x) = a \cdot x^b$;
- б) $y(x) = a \cdot \exp(b \cdot x)$;
- в) $y(x) = a \cdot \cos(b \cdot x)$;
- г) $y(x) = a \cdot \log_b(x)$;
- д) $y(x) = a + b/x$

следует выбрать для описания этих данных? Почему? Каким образом можно найти оценки неизвестных параметров модели?

4. ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ФАКТОРОВ

Сложность моделирования процесса функционирования системы или отдельных ее подсистем обусловлена множеством аспектов неопределенности. Это могут быть упрощения в описании процесса поведения системы-оригинала, невозможность или неточность формального представления правил преобразования входных воздействий в выходные, непредсказуемый характер поведения системы, субъективные факторы, связанные с участием человека-оператора (время реакции, неточность движений), случайный характер параметров системы, входных сигналов и внешних воздействий (климатических, биологических, радиационных и т. д.). Причем в реальных условиях имеет место совместное воздействие всего множества факторов и их взаимное влияние.

Изучением и разработкой моделей, учитывающих неопределенности, занимаются многие математические дисциплины – теория вероятностей, математическая статистика, теория информации, теория игр, теория массового обслуживания, теория нечетких множеств.

Вероятностные модели подразделяют на такие:

- дискретные и непрерывные;
- зависимые и независимые;
- случайные величины и случайные процессы;
- одномерные и многомерные (векторные).

Дискретной случайной величиной (ДСВ) A называют случайную величину, которая может принимать только конечное или счетное множество значений $a_k, k = 1 \dots M$.

a_k	a_1	a_2	a_3
P_k	0,3	0,5	0,2

а

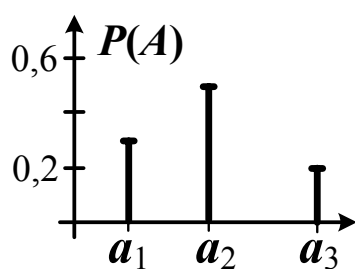


Рис. 4.1. Таблица (а) и диаграмма (б) закона распределения ДСВ

Исчерпывающая характеристика ДСВ – ее закон распределения, который задается:

- в виде таблицы (рис. 4.1, а);
- диаграммой распределения (рис. 4.1, б);
- аналитически $P_k = P\{A = a_k\}$.

Обязательным условием является

$$\sum_{k=1}^M P_k = 1.$$

В практических приложениях распространены ДСВ, принимающие неотрицательные целочисленные значения 0, 1, 2, ... Такие ДСВ можно трактовать как число появлений некоторого случайного события при многократном проведении опыта. Тем самым изучение поведения случайных событий сводится к изучению целочисленных неотрицательных ДСВ.

Случайные величины, возможные значения которых отличаются друг от друга на бесконечно малую величину, называются непрерывными случайными величинами (НСВ).

Для НСВ x интервал между двумя соседними ее возможными значениями стремится к нулю, поэтому вероятность значения x описывается плотностью распределения вероятностей (дифференциальной функцией распределения):

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x^* \leq x \leq x^* + \Delta x\}}{\Delta x}.$$

Плотность распределения $f(x)$ – действительная неотрицательная функция: $f(x) \geq 0$.

Поскольку полное множество значений x в общем случае все множество действительных чисел, т. е. $x \in (-\infty, \infty)$, то $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ – условие нормировки.

Вероятность того, что случайное значение x будет находиться в интервале Δx , определяют как

$$P(x \in [x^*, x^* + \Delta x]) = \int_{x^*}^{x^* + \Delta x} f(x) dx.$$

Вероятность того, что значение случайной величины x не превышает некоторого значения X

$$F(X) = P(x \leq X) = \int_{-\infty}^X f(x) dx,$$

называется интегральной функцией распределения (или просто функцией распределения).

Для описания характера группирования НСВ используют моменты распределения k -го порядка – начальные m_k (см. (1.1), (1.2)) и центральные μ_k (см. (1.3), (1.4)). Форму закона распределения характеризуют третий и четвертый центральные моменты. На практике для оценки формы кривой плотности распределения вероятностей $f(x)$ используют коэффициенты асимметрии β_1 (см. (1.6)) и эксцесса β_2 (см. (1.7)).

4.1. Биномиальный закон распределения

Биномиальное распределение, или распределение Бернулли, – это распределение дискретной случайной величины, которая может принимать одно из двух возможных значений: либо 1 – «true» («истина»), либо 0 – «false» («ложь»). Оно показывает вероятность появления некоторого случайного события A при n независимых повторных испытаниях, в каждом из которых данное событие может наступить с вероятностью p .

Функция вероятности (вероятность того, что событие A наступит ровно k раз при n испытаниях)

$$P_n(x=k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (4.1)$$

Функция распределения вероятностей (вероятность того, что в серии из n испытаний событие A произойдет менее k раз)

$$F(x) = \sum_{k < x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (4.2)$$

Математическое ожидание $m_x = n \cdot p$, дисперсия $D_x = n \cdot p(1-p)$.

На практике по биномиальному закону распределено количество дефектов в готовом изделии, количество аварий на транспорте за некоторый продолжительный интервал времени, количество звонков в телефонной сети за единицу времени и пр.

Форма данного закона распределения существенно зависит от вероятности p (рис. 4.2).

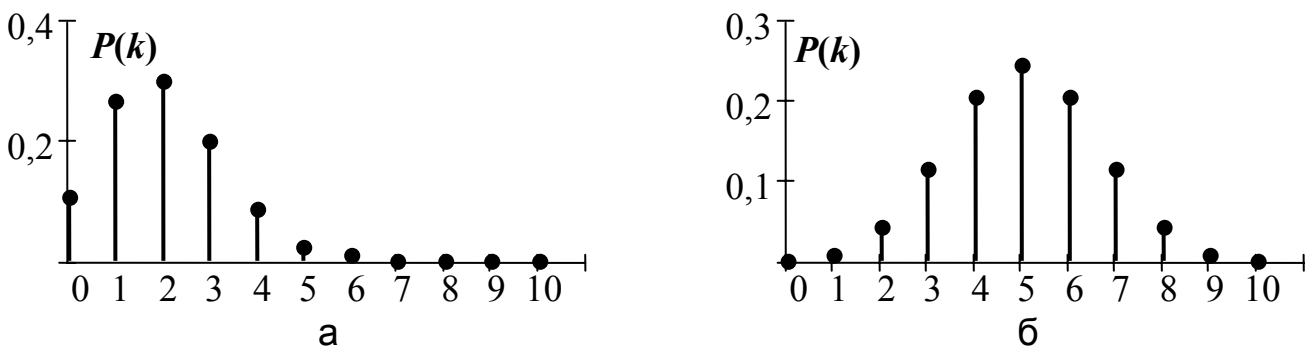


Рис. 4.2. Биномиальный закон распределения: а – $p = 0,2$; б – $p = 0,5$

4.2. Закон Пуассона

Закон Пуассона (закон массовых и редких событий) – предельный случай биномиального закона распределения (4.1) при очень большом количестве испытаний ($n \rightarrow \infty$), в каждом из которых вероятность события очень мала ($p \rightarrow 0$), так что произведение $n \cdot p = const = a$, где a – среднее значение количества событий.

Закон Пуассона описывает целый ряд физико-технических явлений, имеющих импульсный характер, например количество отказов аппаратуры за некоторый промежуток времени, ударные нагрузки при транспортировке аппаратуры и т. п.

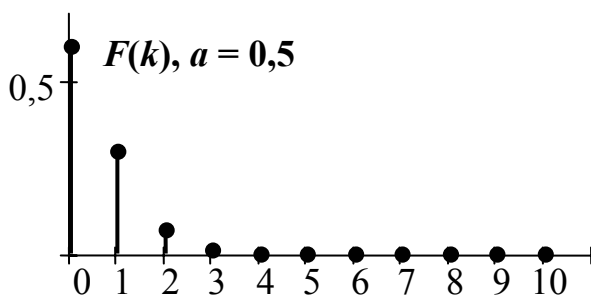


Рис. 4.3. Распределение Пуассона

Параметром закона является интенсивность возникновения событий $\lambda = a/t$ – среднее число случайных событий, происходящих в единичном интервале времени.

Функция распределения вероятности (рис. 4.3)

$$F(x = k; t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \quad (4.3)$$

Математическое ожидание m_x и дисперсия D_x равны a .

4.3. Равномерный закон распределения

Равномерным (равновероятным) называется закон распределения такой непрерывной случайной величины, которая с одинаковой вероятностью может принимать любое значение в заданных пределах (рис. 4.4). Оно применяется в случаях, когда функция распределения случайной величины x неизвестна, а известны ее среднее значение m_x и некоторое рассеяние $\pm \Delta x$ относительно среднего.

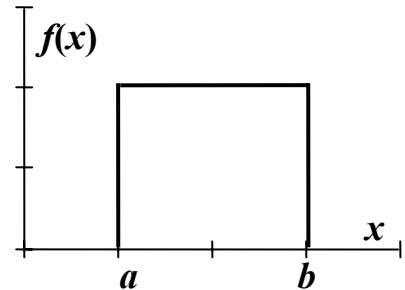


Рис. 4.4. Плотность равномерного закона распределения

По равномерному закону распределены ошибка округления при измерениях или приближенных вычислениях, случайная фаза сигнала, отклонение от расписания движения транспортных средств.

Плотность распределения определяется как

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (4.4)$$

Функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (4.5)$$

Математическое ожидание

$$m_x = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{a+b}{2}.$$

Дисперсия

$$D_x = \sigma_x^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b (x - m_x)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Асимметрия $\beta_1 = 0$, эксцесс $\beta_2 = -1,2$.

4.4. Экспоненциальное распределение

Экспоненциальное распределение широко используют в теории надежности технических систем и в теории массового обслуживания.

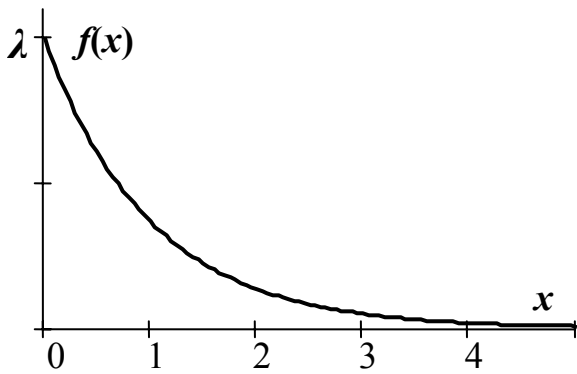


Рис. 4.5. Плотность экспоненциального закона распределения

Случайные величины с таким распределением используют при моделировании процессов выхода из строя и ремонта оборудования в сложных системах, при определении интервалов времени между последовательными вызовами абонентов в телефонной сети или заказов от независимых клиентов в сети обслуживания. Экспоненциальное распределение (рис. 4.5) определяется одним

параметром λ , который называют интенсивностью, или плотностью потока событий.

Плотность распределения

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, \quad x \geq 0. \quad (4.6)$$

Функция распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}. \quad (4.7)$$

Математическое ожидание $m_x = 1/\lambda$, дисперсия $\sigma_x^2 = 1/\lambda^2$, асимметрия $\beta_1 = 2$, эксцесс $\beta_2 = 6$.

4.5. Нормальное распределение

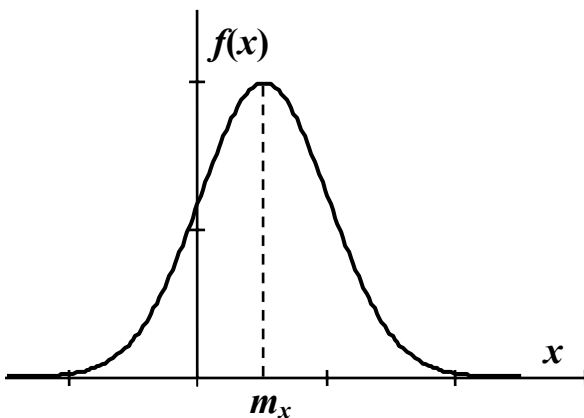


Рис. 4.6. Плотность нормального закона распределения

Нормальное распределение, или распределение Гаусса (рис. 4.6) используют в различных областях науки и техники в качестве вероятностной модели шума. Оно является одной из основных моделей при статистической обработке многоканальных коррелированных данных. Согласно центральной предельной теореме сумма большого количества независимых случайных величин имеет распределение, близкое к нормальному.

Плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad (4.8)$$

где m_x – математическое ожидание; σ_x^2 – дисперсия.

Функция распределения не выражается в аналитических функциях:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) dt.$$

Асимметрия β_1 и эксцесс β_2 равны нулю.

Стандартное обозначение нормального закона распределения $f(x) = N(x; m_x, \sigma_x)$, например, $N(x; 0, 1)$ – стандартное нормальное распределение с параметрами $m_x = 0$ и $\sigma_x = 1$.

4.6. Распределение Рэлея

Закон распределения Рэлея используют, в частности, в радиотехнике для моделирования огибающей смеси высокочастотного сигнала и шума. Случайную величину x с таким распределением можно получить из двух нормально распределенных чисел z_1 и z_2 , у которых МО равны нулю, а СКО – одинаковы: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, путем преобразования

$$x = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}.$$

Распределение Рэлея (рис. 4.7) определяется одним параметром σ .

Плотность распределения Рэлея

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Математическое ожидание $m_x = \sigma\sqrt{\pi/2} \approx 1,25\sigma$, дисперсия $D_x = \sigma^2(2 - \pi/2) \approx 0,43\sigma^2$, асимметрия $\beta_1 \approx 0,63$, эксцесс $\beta_2 \approx 0,3$.

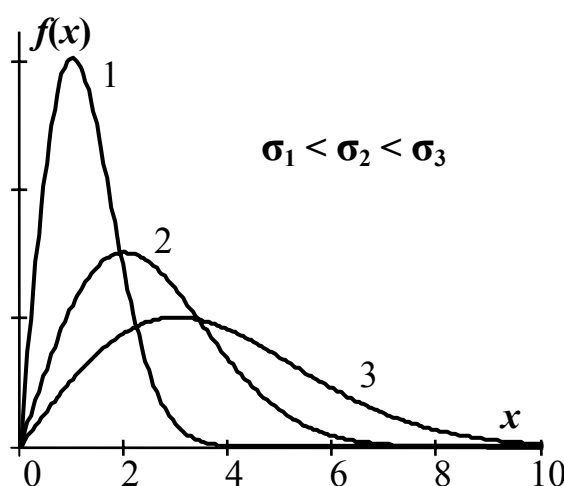


Рис. 4.7. Плотность распределения Рэлея

4.7. Гамма-распределение

Гамма-распределение применяют для моделирования различных физических и экономических явлений и процессов. Вид плотности распределения в значительной степени зависит от значений параметра формы α и параметра масштаба β (рис. 4.8); $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

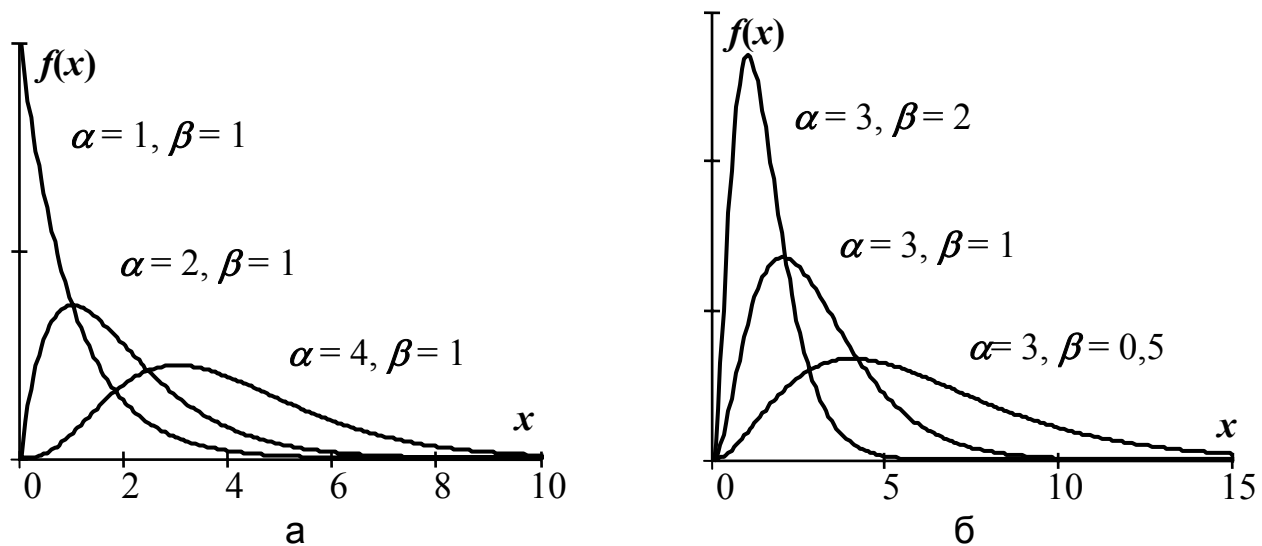


Рис. 4.8. Плотности гамма-распределения

Плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{\sigma^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x \geq 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция, или функция Эйлера:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy.$$

Как и в случае нормального распределения, функция гамма-распределения в аналитических функциях не выражается.

Математическое ожидание $m_x = \alpha\beta$, дисперсия $D_x = \alpha\beta^2$. Коэффициент асимметрии $\beta_1 = 2/\sqrt{\alpha}$, коэффициент эксцесса $\beta_2 = 6/\alpha$.

Частными случаями гамма-распределения являются распределение Эрланга (α – целое число), экспоненциальное ($\alpha=1$ и $\beta=1$) и χ^2 -распределение ($\alpha=0,5$).

4.8. Многомерный закон распределения

Совокупность случайных величин, описывающих некоторый процесс, можно объединить в вектор параметров $x_i, i=1...p$; тогда говорят о многомерной случайной величине (или p -мерном случайном векторе) $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$. Каждая из величин x_1, x_2, \dots, x_p является одномерной случайной величиной со своим законом распределения $f(x_i)$.

Рассмотрим для конкретности двумерный вектор случайных величин $\vec{x} = (x_1, x_2)$. Двумерная случайная величина может быть описана двумерным законом распределения:

– плотностью распределения

$$f(x_1, x_2) = \lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0}} \frac{P[(\xi_1 < x_1 < \xi_1 + \Delta x_1) \cap (\xi_2 < x_2 < \xi_2 + \Delta x_2)]}{\Delta x_1 \Delta x_2};$$

– функцией распределения

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = P[x_1 < \xi_1 \cap x_2 < \xi_2],$$

причем $f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$.

Двумерная плотность распределения связана с одномерными распределениями как

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2|x_1) \text{ или } f(x_1, x_2) = f(x_2)f(x_1|x_2),$$

где $f(x_i|x_j)$ – условная плотность распределения.

Если величины x_1 и x_2 независимы, то $f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2)$.

Случайные величины являются *зависимыми*, если изменение одной приводит к изменению плотности распределения другой.

Случайные величины называются *коррелированными*, если изменение одной случайной величины приводит к изменению математического ожидания другой.

Степень корреляционной зависимости двух случайных величин описывается коэффициентом корреляции

$$R_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1)(x_2 - m_2)f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (4.12)$$

или нормированным коэффициентом корреляции

$$r_{12} = R_{12}/(\sigma_1 \sigma_2), \quad -1 \leq r \leq 1. \quad (4.13)$$

Для описания взаимосвязи многомерных случайных величин используют корреляционную матрицу – симметричную невырожденную матрицу размером $p \times p$, составленную из центральных моментов второго порядка, образованных составляющими случайного вектора \vec{x} :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & r_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & r_{1p}\sigma_1\sigma_p \\ r_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdots & r_{2p}\sigma_2\sigma_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{1p}\sigma_1\sigma_p & r_{2p}\sigma_2\sigma_p & \cdots & \sigma_p^2 \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

где r_{ij} – коэффициент корреляции между i -й и j -й компонентами случайного вектора.

Для некоррелированных процессов $r_{ij} = 0$ и $\mathbf{R} = \text{diag}(\sigma_i^2)$.

На рис. 4.9 показано влияние коэффициента корреляции r_{12} на эллипс рассеяния двумерной случайной величины $\bar{x} = (x_1, x_2)$. Направления главных осей эллипса совпадают с собственными векторами корреляционной матрицы \mathbf{R} , а диаметры пропорциональны квадратному корню от соответствующих собственных чисел или СКО.

Знак r_{12} определяет направление взаимосвязи компонент случайного вектора x_1 и x_2 , а абсолютное значение r_{12} – силу связи; при $|r_{12}| = 1$ эллипс вырождается в прямую линию.

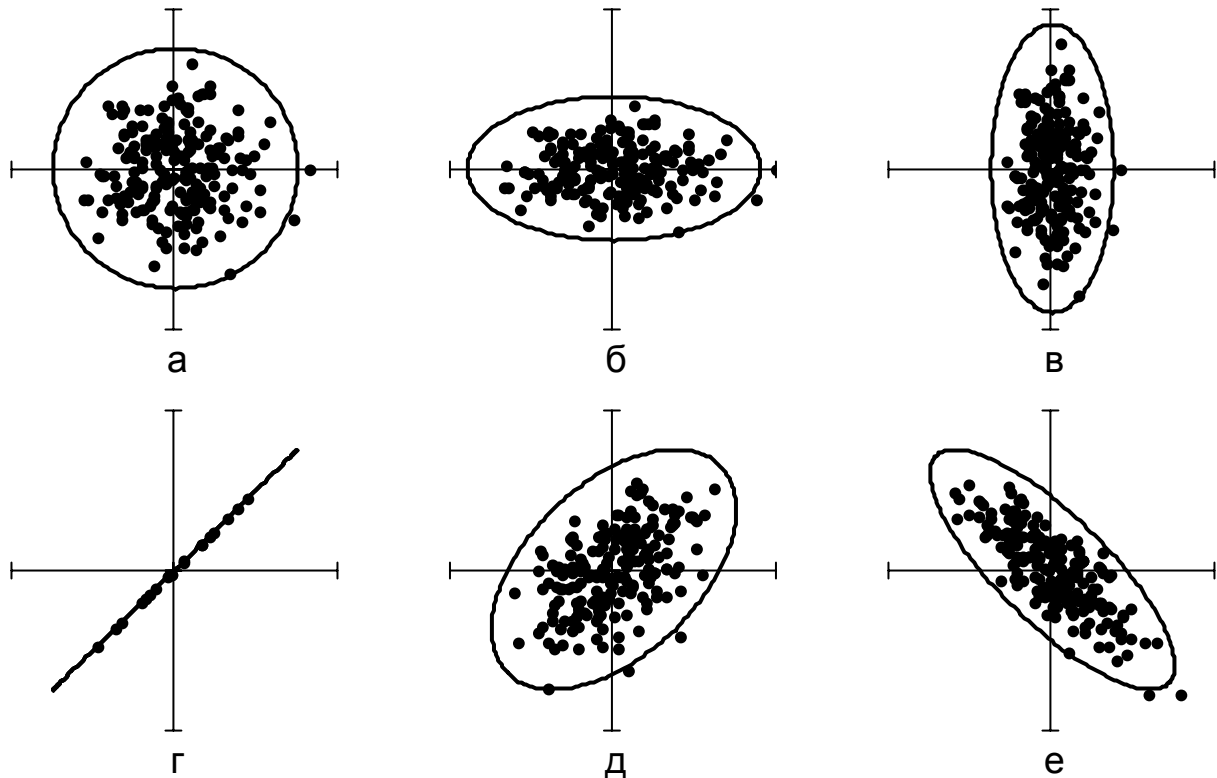


Рис. 4.9. Физический смысл коэффициента корреляции:
 а – $r_{12} = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2$; б – $r_{12} = 0$, $\sigma_1 > \sigma_2$; в – $r_{12} = 0$, $\sigma_1 < \sigma_2$;
 г – $r_{12} = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2$; д – $r_{12} = 0,5$, $\sigma_1 = \sigma_2$; е – $r_{12} = -0,8$, $\sigma_1 = \sigma_2$

Следует иметь в виду, что некоррелированность двух случайных величин не означает их независимости, в то время как независимые величины всегда некоррелированы.

Наиболее широко используемая модель векторных случайных величин – многомерный нормальный закон распределения

$$f(\bar{x}) = (2\pi)^{-p/2} |\mathbf{R}|^{-1/2} \exp\left\{-0,5(\bar{x} - \bar{m})^T \mathbf{R}^{-1} (\bar{x} - \bar{m})\right\}, \quad (4.15)$$

где \bar{m} – p -мерный вектор математического ожидания; $|\mathbf{R}|$ – определитель корреляционной матрицы \mathbf{R} ; \mathbf{R}^{-1} – матрица, обратная \mathbf{R} .

При $p = 2$ (рис. 4.10) плотность нормального закона распределения определяется пятью параметрами m_1 , m_2 , σ_1 , σ_2 и r_{12} :

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - r_{12}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - r_{12}^2)} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{x - m_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2r_{12} \left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \right)^2 \right\}. \quad (4.16)$$

Очевидно, что для некоррелированных случайных величин $r_{12} = 0$ и $f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2)$.

Многомерный нормальный закон полностью определяется вектором средних значений \vec{m} и корреляционной матрицей \mathbf{R} .

Для нормального распределенных составляющих многомерной случайной величины понятия независимости и некоррелированности равносильны.

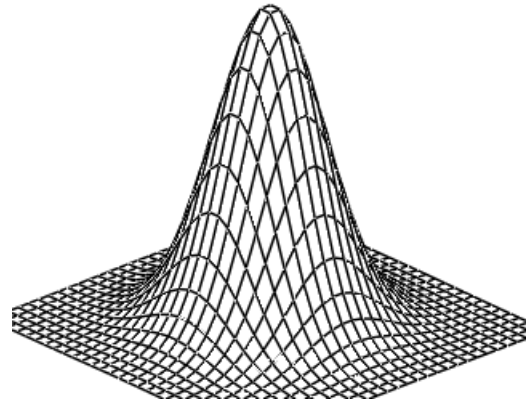


Рис. 4.10. Двумерная плотность нормального распределения

4.9. Модели случайных процессов

Входные воздействия на системы, их выходные реакции и внутренние параметры, а также внешние факторы, воздействующие на системы, во многих случаях являются случайными функциями неслучайного аргумента – времени, пространственных координат, частоты. Поэтому такие случайные функции называют стохастическими, или случайными процессами (СП). Если случайный процесс является функцией вектора аргументов, например координат (x, y, z) , то такие СП называют случайными полями.

Функция от времени $x_k(t)$, описывающая случайное явление, называется выборочной функцией (выборкой). При конечном интервале наблюдения выборочную функцию называют реализацией СП (рис. 4.11). Мгновенное значение реализации в момент времени $t = t_i$ будем называть ее отсчетом.

Случайный процесс или поле задается совокупностью своих реализаций (ансамблем выборочных функций).

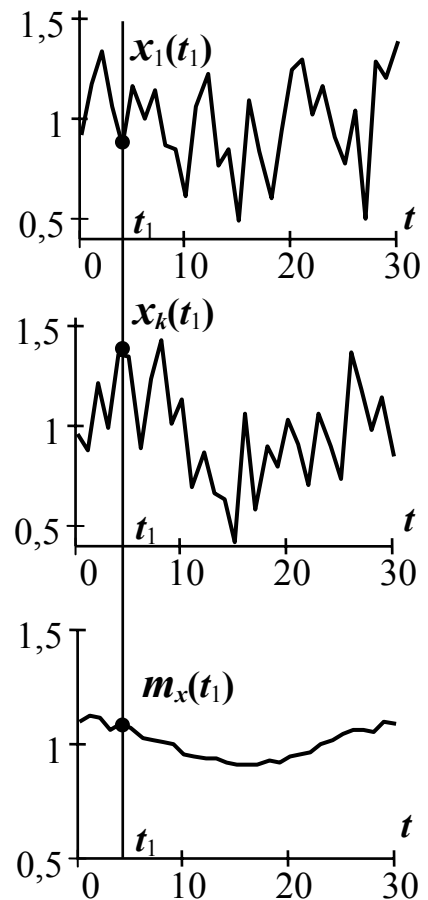


Рис. 4.11. Реализации процесса и средняя функция

Основные характеристики СП:

1) математическое ожидание $m(t)$ – это "средняя" функция, вокруг которой происходит разброс реализаций. Его значение в момент времени t_i можно найти усреднением отсчетов каждой выборочной функции ансамбля (см. рис. 4.11):

$$m(t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_i).$$

Путем изменения времени от $t = 0$ до $t = \infty$ может быть определено математическое ожидание $m(t)$ – неслучайная функция времени, которая при любом значении t равна математическому ожиданию соответствующего сечения по времени случайного процесса:

$$m(t) = M\{x(t)\};$$

2) многомерная функция распределения СП

$$\begin{aligned} F(x(t)) &= F_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) = \\ &= P\{x(t_1) \leq x_1; x(t_2) \leq x_2; \dots; x(t_N) \leq x_N\}; \end{aligned}$$

3) многомерная плотность распределения

$$f_n(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N) = \frac{\partial^n F_n}{\partial x_1 \dots \partial x_N} =$$

$$= P\{x_1 < x(t_1) < x_1 + \Delta x_1; \dots; x_N < x(t_N) < x_N + \Delta x_N\}, \Delta x_i \rightarrow 0.$$

Тогда математическое ожидание случайного процесса может быть представлено в виде моментной функции первого порядка

$$m(t) = m_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, t) dx = M\{x(t)\};$$

4) дисперсия СП (моментная функция второго порядка)

$$D(t) = m_2(t) = M\{(x(t) - m(t))^2\}$$

характеризует разброс СП относительно средней функции;

5) среднеквадратическое отклонение

$$\sigma(t) = \sqrt{D(t)};$$

6) автокорреляционная функция (АКФ)

$$R_x(t_1, t_2) = M\{(x(t_1) - m(t_1))(x(t_2) - m(t_2))\} \quad (4.17)$$

характеризует зависимость значения СП в данный момент времени t_2 от его значения в некоторый предыдущий момент времени t_1 ;

7) нормированная корреляционная функция

$$r(t_1, t_2) = \frac{R_x(t_1, t_2)}{\sigma(t_1) \cdot \sigma(t_2)}; \quad (4.18)$$

8) для двух случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$ используется взаимная

корреляционная функция (ВКФ)

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M\{(x(t_1) - m_x(t_1))(y(t_2) - m_y(t_2))\}; \quad (4.19)$$

9) поскольку процессы – функции времени, то преобразование Фурье для отдельной реализации дает ее спектральную плотность:

$$\dot{X}_k(\omega) = F\{x_k(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_k(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (4.20)$$

10) спектральная плотность мощности (энергетический спектр СП)

$$S^2(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\dot{X}_k(\omega)^2]. \quad (4.21)$$

Контрольные вопросы

1. Как описывают случайные величины?
2. В чем разница между законом распределения и плотностью распределения вероятности?
3. Запишите выражения, связывающие числовые характеристики с параметрами распределений.
4. Приведите примеры параметров входных и выходных сигналов или внутренних переменных систем, которые являются случайными величинами. Предложите подходящую вероятностную модель для их описания.
5. На что влияет количество параметров распределения?
6. Какими свойствами должна обладать некоторая математическая функция, чтобы ее можно было рассматривать как плотность распределения вероятности (функцию распределения)?
7. Для произвольного распределения $f(x)$ при заданных значениях параметров постройте графики плотности распределения вероятности и функции распределения.
8. Как описывают случайные векторы?
9. Что означают зависимость и коррелированность случайных величин? Если случайные величины зависимы, могут ли они являться некоррелированными? Если случайные величины независимы, означает ли это их некоррелированность?
10. Что характеризует коэффициент корреляции?
11. Для случайного вектора \vec{x} при заданных \vec{m} , $\vec{\sigma}$ и r_{ij} запишите корреляционную матрицу \mathbf{R} .
12. Что общего и в чем различие между случайной величиной, случайным вектором и случайным процессом?
13. Назовите основные характеристики случайных величин, случайных векторов и случайных процессов.
14. Что характеризуют корреляционные функции АКФ и ВКФ?
15. Что такое спектральная плотность случайного процесса?

5. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФАКТОРОВ

Чтобы построить статистическую модель фактора, необходимо оценить вид распределения и найти оценки параметров распределения. Для этого применяют типовые алгоритмы статистического анализа наблюдений, основными из которых являются:

- эмпирические моменты распределения k -го порядка

$$\hat{m}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^k, \quad (5.1)$$

где N – количество отсчетов (объем выборки); x_i – значения отсчетов;

- оценка математического ожидания (среднее выборочное)

$$\hat{m} = \bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i; \quad (5.2)$$

- эмпирические центральные моменты k -го порядка

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^k; \quad (5.3)$$

- несмещенная оценка дисперсии

$$\hat{D} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (5.4)$$

или оценка среднеквадратического отклонения

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{D}_x}. \quad (5.5)$$

Для оценки плотности распределения чаще всего используют гистограммный метод.

Гистограмма – ступенчатая фигура (рис. 5.1, а), состоящая из прямоугольников, основания которых – частичные интервалы длиной Δx_k , а высоты рассчитывают по формуле

$$\hat{f}_k(x^*) = \frac{n_k}{\Delta x_k \cdot N}, \quad (5.6)$$

где Δx_k – узкий интервал, симметричный относительно точки x^* ; n_k – количество попаданий выборочных значений фактора в интервал Δx_k , $k = 0 \dots M - 1$; M – количество интервалов гистограммы. M зависит от объема выборки; при N от 200 до 500 значение M обычно выбирают в диапазоне от 10 до 20.

Функцию распределения (рис. 5.1, б)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz,$$

можно оценить по результатам оценки плотности распределения как

$$\hat{F}_k = \sum_{i=0}^{k-1} \hat{f}_i, \quad k = 0 \dots M. \quad (5.7)$$

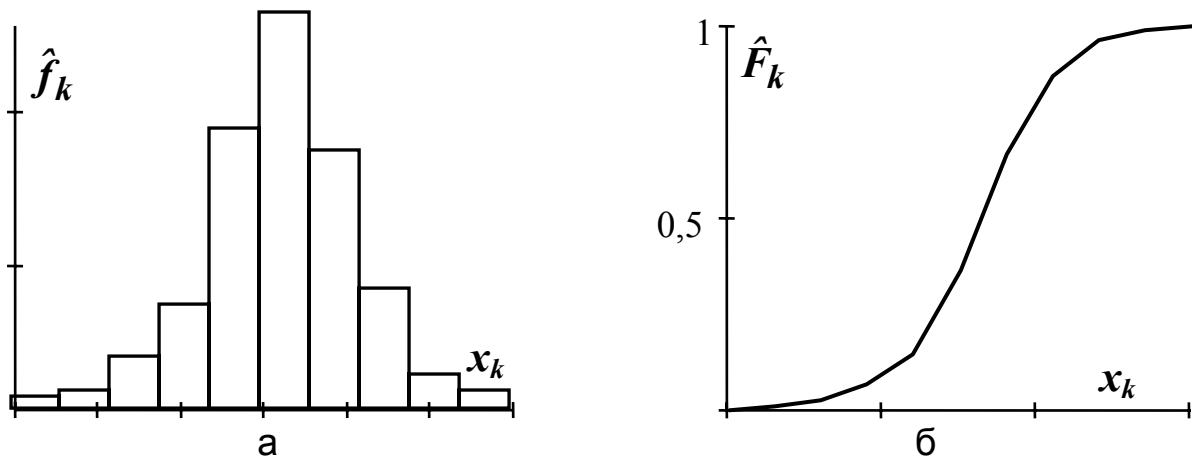


Рис. 5.1. Гистограмма (а) и эмпирическая функция распределения (б)

Коэффициенты корреляции R_{xy} и нормированные коэффициенты корреляции r_{xy} между случайными признаками x и y можно оценить непосредственно по отсчетам $x_i, y_i, i=1..N$ как

$$\hat{R}_{xy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}); \quad (5.8)$$

$$\hat{r}_{xy} = \frac{\hat{R}_{xy}}{\hat{\sigma}_x \cdot \hat{\sigma}_y}. \quad (5.9)$$

Корреляционная функция случайного процесса $x(t)$ может быть определена либо прямыми вычислениями по отсчетам процесса x_i

$$\hat{R}(n) = \frac{1}{N-n} \sum_{i=1}^{N-n} (x_i - \bar{x})(x_{i+n} - \bar{x}), \quad (5.10)$$

либо методом преобразования Фурье согласно теореме Винера–Хинчина

$$\hat{R} = F^{-1} \{ \dot{X}(\omega) \cdot \dot{X}^*(\omega) \}, \quad (5.11)$$

где $\dot{X}(\omega) = F \{ x(t) \}$ – спектр реализации процесса; * – знак комплексного сопряжения.

В пакете Mathcad прямое быстрое преобразование Фурье реализует функция $fft(x)$, где x – вектор, состоящий из 2^k элементов (k – целое число), а соответствующее обратное преобразование – функция $ifft(X)$.

Для статистической обработки данных в пакете Mathcad можно использовать такие встроенные функции:

- $mean(A, B, \dots)$ – арифметическое среднее элементов в A, B, \dots , где A, B, \dots – массивы или скаляры;
- $Stdev(A, B, \dots)$ – несмещенная оценка СКО элементов в A, B, \dots ;
- $cvar(A, B)$ – оценка коэффициента корреляции между элементами в A и B ;

– $corr(A, B)$ – оценка нормированного коэффициента корреляции между элементами в A и B ;

– $hist(w, A)$ – количество попаданий значений массива A в интервалы, координаты которых содержатся в векторе w ;

– $histogram(n, A)$ – возвращает матрицу $n \times 2$; в первом столбце находятся середины n интервалов равной ширины, во втором – количество попаданий значений массива A в эти интервалы.

Выбор статистической модели (подбор закона распределения по экспериментальным данным) можно проводить с помощью коэффициентов асимметрии β_1 и эксцесса β_2 , которые характеризуют форму кривой плотности вероятности. Коэффициент асимметрии характеризует симметричность закона распределения (например, для нормального закона $\beta_1 = 0$, для экспоненциального – $\beta_1 = 2$). Коэффициент эксцесса описывает "островершинность" закона распределения. За эталон принят нормальный закон – $\beta_2 = 0$. Если эксцесс положительный, то кривая плотности распределения вероятностей имеет более высокую и «острую» вершину, чем нормальная кривая (например, для экспоненциального закона $\beta_2 = 6$). Если эксцесс отрицательный, то сравниваемая кривая имеет более низкую и «плоскую» вершину, чем нормальная кривая (например, для равномерного закона $\beta_2 = -1,2$).

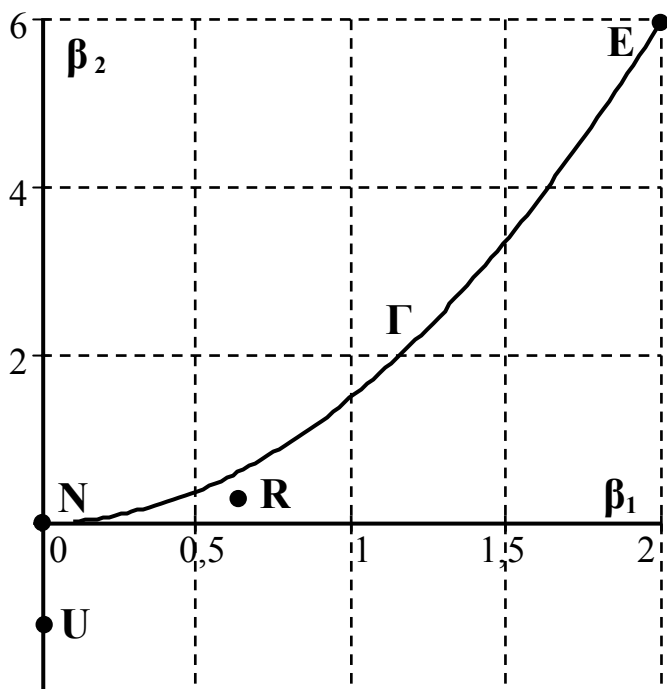


Рис. 5.2. Плоскость моментов:
 Γ – линия гамма-распределения;
 E – экспоненциальный закон;
 R – распределение Рэлея;
 N – нормальное распределение;
 U – равномерное распределение

Если теоретические значения асимметрии и эксцесса для различных законов распределения нанести на плоскость в системе координат $\{\beta_1, \beta_2\}$, как показано на рис. 5.2, то получится диаграмма, называемая плоскостью моментов. Найденные оценки коэффициентов асимметрии $\hat{\beta}_1$ и эксцесса $\hat{\beta}_2$ можно нанести точкой на эту плоскость. Тогда в качестве статистической модели исследуемой случайной величины или случайного процесса можно принять ближайший из законов распределения.

Расстояние между двумя точками A и B с координатами (β_1^A, β_2^A) и (β_1^B, β_2^B) определяют по формуле

$$d_{AB} = \sqrt{(\beta_1^A - \beta_1^B)^2 + (\beta_2^A - \beta_2^B)^2}.$$

Если на плоскости моментов рядом с точкой, соответствующей экспериментальным данным, оказалось несколько известных законов распределения, следует проверить все варианты статистической модели на адекватность. Проверку согласия теоретического и экспериментального распределений можно провести по критерию χ^2 (критерию Пирсона), для чего необходимо вычислить гистограмму экспериментальной выборки \hat{f}_k (5.6), найти теоретические значения плотности для предполагаемого закона распределения $f(x)$ и теоретические значения вероятностей попадания выборочных значений в интервалы гистограммы:

$$P_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(z) dz, \quad k = 0 \dots M-1,$$

где M – количество интервалов (разрядов) в гистограмме.

Значение критерия χ^2 определяется как взвешенная сумма квадратов отклонений теоретического и эмпирического количества попаданий в интервалы гистограммы:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^M \frac{(N \cdot P_k - \hat{f}_k)^2}{N \cdot P_k}, \quad (5.12)$$

где N – количество отсчетов в выборке $\{x_i\}$.

Вывод о непротиворечии эмпирического распределения (гистограммы) выбранному теоретическому распределению делают на основе сравнения рассчитанного значения χ^2 с квантилем этого распределения $\chi_\alpha^2(\tau, \alpha)$. Квантиль порядка α χ^2 -распределения определяется заданной вероятностью α (уровнем значимости гипотезы о виде распределения) и числом степеней свободы τ :

$$\tau = M - 1 - L, \quad (5.13)$$

где M – количество интервалов гистограммы; L – количество параметров распределения, оцениваемых по выборке. Единицу вычитают всегда в силу условия нормировки

$$\sum_{k=1}^M \hat{f}_k(x) = 1.$$

Если $\chi^2 \leq \chi_\alpha^2$, то теоретическое и эмпирическое распределения с вероятностью $P = 1 - \alpha$ не противоречат друг другу. В противном случае гипотезу отвергают как неправдоподобную.

Уровень значимости α – это вероятность совершить ошибку *первого рода*, т. е. отвергнуть правильную гипотезу. Ошибка *второго рода* состоит

в том, что будет принята неправильная гипотеза; вероятность такой ошибки принято обозначать β .

При работе в Mathcad для нахождения величины α по критерию χ^2 используют функцию $pchisq(z, \tau)$, возвращающую значение интегральной функции χ^2 -распределения с τ степенями свободы.

При известной величине τ и рассчитанном значении χ^2 вероятность того, что гипотеза о виде распределения соответствует экспериментальным данным, можно найти так:

$$P(\chi^2, \tau) := 1 - pchisq(\chi^2, \tau).$$

Для оценки неизвестных параметров распределения можно воспользоваться относительно простым **методом моментов**, который состоит в приравнивании теоретических моментов рассматриваемого распределения к соответствующим эмпирическим моментам того же порядка.

Для оценки одного параметра θ достаточно иметь одно уравнение относительно этого параметра. Так как момент первого порядка (математическое ожидание) $m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x; \theta) dx = \varphi(\theta)$ есть функция от параметра θ , а оценка математического ожидания (среднее выборочное) \bar{x} – число, определяемое по данным, то, приравняв $m_x = \bar{x}$, получим уравнение с одним неизвестным. Решив это уравнение относительно параметра θ , тем самым найдем его точечную оценку $\hat{\theta}$, которая является функцией от выборки.

Например, для экспоненциального распределения $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ математическое ожидание $m_x = 1/\lambda$, а оценка математического ожидания

$$\hat{m} = \bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i. \text{ Отсюда получим } \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^N x_i}.$$

Для отыскания двух параметров θ_1 и θ_2 необходимы два уравнения относительно этих параметров. Обычно приравнивают начальные теоретический и эмпирический моменты первого порядка $m_x = \bar{x}$ и центральные теоретический и эмпирический моменты второго порядка $D_x = \hat{D}$. Математическое ожидание и дисперсия есть функции от θ_1 и θ_2 ; таким образом, получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными θ_1 и θ_2 . Решение этой системы дает точечные оценки параметров $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$.

Например, для равномерного распределения $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $a \leq x \leq b$ математическое ожидание $m_x = (b+a)/2$, а среднеквадратическое

отклонение $\sigma_x = (b - a)/\sqrt{12}$. Оценив по выборке значения \hat{m} и $\hat{\sigma}$, составим систему уравнений

$$\begin{cases} (b + a)/2 = \hat{m}; \\ (b - a)/\sqrt{12} = \hat{\sigma}. \end{cases}$$

Корни системы – точечные оценки параметров a и b , т. е.

$$\hat{a} = \hat{m} - \sqrt{3} \cdot \hat{\sigma}, \quad \hat{b} = \hat{m} + \sqrt{3} \cdot \hat{\sigma}.$$

Таким образом, **статистическая модель** фактора – это оценка закона его распределения и оценки параметров распределения.

Контрольные вопросы

1. По заданной выборке $\{x_i\}$ найдите статистические оценки математического ожидания, дисперсии, СКО, коэффициентов асимметрии и эксцесса.

2. По заданным выборкам $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ определите оценки коэффициента корреляции и нормированного коэффициента корреляции случайных величин x и y .

3. По выборке отсчетов случайного процесса $\{x_i\}$ постройте график его автокорреляционной функции.

4. Как статистически оценить вероятность, что некоторая реализация случайной величины x будет находиться в интервале $[A, B]$?

5. Какие методы оценки вида закона распределения экспериментальных данных Вы знаете? В чем суть этих методов?

6. Каким образом выполняют проверку предположения о виде закона распределения экспериментальных данных?

7. Как определить число степеней свободы критерия χ^2 ?

8. Как найти неизвестные параметры распределения?

9. Что собой представляет статистическая модель случайного фактора? Как построить статистическую модель?

10. Что такое плоскость моментов? Как по плоскости моментов можно выбрать статистическую модель для описания данных?

11. По таблице данных, где x_{Hk} и x_{Kk} – координаты начала и конца k -го интервала гистограммы, n_k – количество попаданий реализаций случайной величины в интервал $[x_{Hk}, x_{Kk}]$,

x_{Hk}	0	1	4	6	7
x_{Kk}	1	4	6	7	10
n_k	20	20	20	20	20

постройте эмпирическую плотность и эмпирическую функцию распределения. Оцените соответствие экспериментальных данных равномерному закону распределения по критерию χ^2 .

6. ЭМПИРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФАКТОРОВ

Экспериментальные результаты – массивы чисел, обычно представляемые в виде таблиц. Поскольку данные были получены лишь для некоторых дискретных значений аргумента, то приходится решать задачу отыскания значений неизвестной таблично заданной функции в промежуточных точках. При этом необходимо найти эмпирическую зависимость в виде некоторой функции $f(x)$, которая наилучшим образом описывала бы табличные данные.

Существует два основных подхода к описанию (приближению) табличных данных с помощью элементарных функций. В первом – требуют, чтобы аппроксимирующая кривая (возможно, кусочно-гладкая) проходила через все точки, заданные таблицей (рис. 6.1, а). Эту задачу решают методами *интерполяции*. Часто базовой интерполяционной функцией является полиномиальная зависимость, т. е. $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$.

Во втором – данные *аппроксимируют* простой функцией, применимой во всем диапазоне табличных данных, но не обязательно проходящей через все точки (рис. 6.1, б). Выбор того или иного подхода зависит от объема данных и от информации об их точности.

Простейший вид интерполяции – *кусочно-линейная интерполяция* (рис. 6.2), в основе которой лежит представление кривой на участке между точками с координатами (x_k, y_k) и (x_{k+1}, y_{k+1}) в виде прямой, проходящей через эти точки. Уравнение такой прямой имеет вид:

$$y = \frac{y_k(x - x_{k+1}) - y_{k+1}(x - x_k)}{x_k - x_{k+1}}. \quad (6.1)$$

Таким образом, зная два табличных значения y_k и y_{k+1} функции, которые соответствуют значениям x_k и x_{k+1} независимой переменной, с помощью формулы (6.1) можно найти значение неизвестной функции $y = f(x)$ при любом x в интервале $[x_k, x_{k+1}]$.

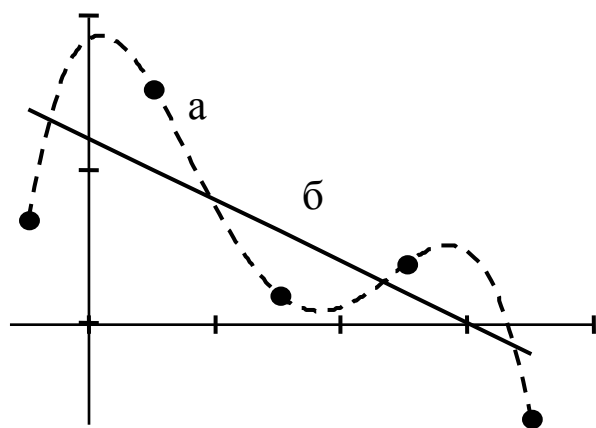


Рис. 6.1. Интерполяция (а) и аппроксимация (б) данных

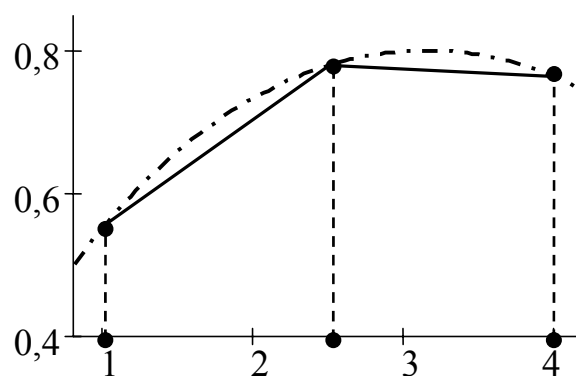


Рис. 6.2. Кусочно-линейная интерполяция

Обычно полагают, что, используя большее количество соседних точек и представляя истинную кривую более сложной линией, можно уточнить полученный результат. При этом ищут интерполирующую функцию в виде многочлена (полинома). Математическая постановка задачи: пусть на интервале $[a, b]$ заданы $n + 1$ точка x_0, x_1, \dots, x_n – узлы интерполяции и значения функции $f(x)$ в этих узлах y_0, y_1, \dots, y_n . Требуется построить полином $P_n(x)$ степени n , значения которого в узлах интерполяции совпадают с заданными значениями функции:

$$P_n(x_i) = f(x_i), i = 0 \dots n. \quad (6.2)$$

Интерполяционный полином Лагранжа применяют для узлов интерполяции, расположенных с произвольным шагом. Для построения полинома $P_n(x)$ рассмотрим вспомогательный многочлен $\omega_k(x)$, равный единице при $x = x_k$ и нулю в остальных узлах интерполяции:

$$\omega_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = x_k, \\ 0 & \text{при } x = x_i \neq x_k. \end{cases} \quad (6.3)$$

Таким образом, многочлен $\omega_k(x)$ имеет вид

$$\omega_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}. \quad (6.4)$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа можно записать так:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \omega_k(x) f(x_k). \quad (6.5)$$

Для больших таблиц данных, составленных при равноотстоящих значениях независимой переменной $x_i = x_0 + i \cdot h$ ($i = 0 \dots n$, h – шаг), используют разностные методы интерполяции, из которых наиболее распространен метод Ньютона.

Для интерполирования в точках x , близких к началу таблицы x_0 , используют первую интерполяционную формулу Ньютона

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}). \quad (6.6)$$

Коэффициенты a_i находят из условия совпадения значений функции и интерполяционного полинома в узлах: $P_n(x_i) = y_i$. Эти условия образуют систему линейных уравнений, которая может быть решена с применением так называемых конечных разностей.

Для функции, заданной таблично с постоянным шагом h , конечные разности первого порядка определяют как разности между значениями функции в соседних узлах интерполяции:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i.$$

Конечные разности второго порядка

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i.$$

Аналогично получают выражения для конечных разностей третьего порядка:

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i.$$

Таким образом, конечные разности m -го порядка находят через конечные разности $(m-1)$ -го порядка:

$$\Delta^m y_i = \Delta^{m-1} y_{i+1} - \Delta^{m-1} y_i$$

или

$$\Delta^m y_i = y_{i+m} - m y_{i+m-1} + \frac{m(m-1)}{2!} y_{i+m-2} - \dots + (-1)^m y_i.$$

Через конечные разности коэффициенты полинома (6.6) выражаются так:

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}, \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}, \dots, \quad a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}.$$

При построении интерполяционного многочлена обычно учитывают не все заданные узлы x_i , $i = 0 \dots n$, а только их часть, т. е. выполняют кусочную интерполяцию; это приводит к уменьшению степени полинома (6.6).

Метод Ньютона позволяет уточнять результат, используя дополнительные конечные разности, причем нет необходимости начинать вычисления сначала. Поэтому если неизвестно, сколько членов потребуется для построения интерполяционного полинома $P_m(x)$, $m < n$, количество слагаемых формулы (6.6) можно увеличивать до тех пор, пока их вклад не станет пренебрежимо мал.

Если точка интерполирования x лежит вблизи конечной точки таблицы x_n , то применяют *вторую интерполяционную формулу Ньютона*, которая получается, если искать интерполяционный полином в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + a_n(x - x_n) \dots (x - x_1), \quad (6.7)$$

где коэффициенты полинома

$$a_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k! h^k}.$$

При больших степенях полинома ($n > 5$) возникают большие всплески между узлами интерполяции. Поэтому, чтобы повысить точность расчетов для больших таблиц данных, применяют кусочную интерполяцию, а если недопустимы точки разрыва самой функции и ее производных, – используют интерполяцию сплайнами (рис. 6.3).

Сплайн – группа сопряженных многочленов второго, третьего или четвертого порядков, в местах сопряжения которых первая и вторая производные непрерывны. Обычно используют кубические сплайны

$$g_i(x) = k_{1i} + k_{2i}x + k_{3i}x^2 + k_{4i}x^3, \quad i = 0 \dots n. \quad (6.8)$$

Для нахождения $4n$ неизвестных коэффициентов k необходимо составить $4n$ уравнений, соответствующих определенным условиям.

Первые $2n$ условий требуют, чтобы сплайны соприкасались в заданных точках:

$$g_i(x_i) = y_i, \quad i = 1 \dots n;$$

$$g_{i+1}(x_i) = y_i, \quad i = 0 \dots n-1.$$

Следующие $(2n-2)$ условия требуют, чтобы в местах соприкосновения сплайнов были равны первые и вторые производные:

$$g'_{i+1}(x_i) = g'_i(x_i), \quad i = 1 \dots n-1;$$

$$g''_{i+1}(x_i) = g''_i(x_i), \quad i = 1 \dots n-1.$$

Последние два условия обычно имеют вид:

$$g''_1(x_0) = 0;$$

$$g''_n(x_n) = 0.$$

Если экспериментальные данные измерены с заметной погрешностью, то интерполяция нецелесообразна; аппроксимация позволит сгладить ошибки эксперимента. *Аппроксимацию* данных называют подгонкой кривой, которую требуется провести так, чтобы ее отклонения от табличных данных были минимальными, т. е. функцию $f(x)$, заданную своими значениями в дискретных узлах $y_i = f(x_i), \quad i = 1 \dots n$, заменяют в некотором смысле близкой функцией $g(x)$:

$$\|f(x_i) - g(x_i)\| < \varepsilon,$$

где ε – точность аппроксимации.

С учетом этого задачу можно сформулировать таким образом: найти такую функцию $g(x)$ заданного вида, чтобы расстояние в n -мерном пространстве между точками $M(y_1, y_2, \dots, y_n)$ и $\bar{M}(g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n))$ было наименьшим. Обычно требуется свести к минимуму сумму квадратов разностей между значениями аппроксимирующей функции $g(x_i)$ и табличными значениями y_i . Такой метод подгонки называется *методом наименьших квадратов*.

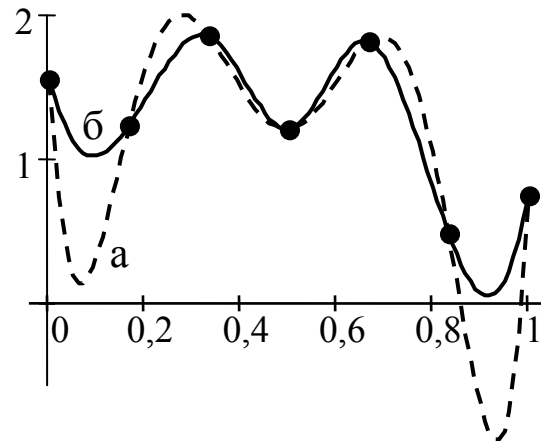


Рис. 6.3. Результаты интерполяции: а – полиномом; б – сплайном

Функцию $g(x)$ выбирают с учетом специфики табличных данных: их периодичности, экспоненциального или логарифмического характера, симметрии и наличия асимптотики. Иногда таблицу разбивают на части и для каждой подбирают отдельную аппроксимирующую кривую. Это оправдано, когда есть основание полагать, что данные соответствуют разным физическим состояниям объекта (например, переход от устойчивого состояния системы к неустойчивому).

Для аппроксимации табличных данных используют такие функции:

$$y = \sum_{i=0}^m a_i x^i \quad (m \ll n), \quad y = cx/(ax + b); \quad y = a + (b/x); \quad y = a \ln(x) + b, \\ y = ax^m, \quad y = ae^{mx}.$$

Обычно $g(x)$ выбирают в виде линейной комбинации подходящих функций

$$g(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \dots + c_k g_k(x). \quad (6.9)$$

Погрешность аппроксимации в каждой табличной точке

$$\varepsilon_i = y_i - g(x_i).$$

Тогда сумма квадратов погрешностей

$$E = \sum_{i=0}^n [y_i - g(x_i)]^2. \quad (6.10)$$

С учетом (6.9) условие $\min\{E\}$ определяется уравнениями

$$\partial E / \partial c_1 = \partial E / \partial c_2 = \dots = \partial E / \partial c_k = 0,$$

что эквивалентно системе k линейных уравнений с k неизвестными, которую можно решить точными или итерационными методами:

$$\begin{cases} \partial E / \partial c_1 = 2 \sum_{i=0}^n [c_1 g_1(x_i) + \dots + c_k g_k(x_i) - y_i] g_1(x_i) = 0; \\ \partial E / \partial c_2 = 2 \sum_{i=0}^n [c_1 g_1(x_i) + \dots + c_k g_k(x_i) - y_i] g_2(x_i) = 0; \\ \dots \\ \partial E / \partial c_k = 2 \sum_{i=0}^n [c_1 g_1(x_i) + \dots + c_k g_k(x_i) - y_i] g_k(x_i) = 0. \end{cases} \quad (6.11)$$

В Mathcad кусочно-линейная интерполяция реализуется функцией **linterp**(X, Y, x), где X, Y – векторы значений аргумента и функции; x – значения промежуточных точек.

Для интерполяции кубическими сплайнами используют функцию **interp**(S, X, Y, x), где S – значения коэффициентов сплайна, которые определяются как **S := cspline**(X, Y).

Решить задачу аппроксимации в Mathcad позволяет ряд встроенных функций. Например, с помощью функций **slope** и **intersept** определяют коэффициенты a и b линейной функции $y = a + bx$, описывающей табличные данные: $a := \text{intersept}(X, Y)$; $b := \text{slope}(X, Y)$.

Для аппроксимации полиномами используют $\text{interp}(V, X, Y, x)$, где V – функция, вычисляемая функциями **loess** или **regress**. Эти функции имеют такой вид: $\text{loess}(X, Y, \text{span})$, где **span** – параметр, выбирающий значения x для интерполяции полиномом второй степени в указанном диапазоне (по умолчанию $\text{span} = 0,75$); $\text{regress}(X, Y, n)$, где n – степень полинома ($n \leq 4$).

Функция $\text{lifit}(X, Y, F)$, где F – вектор функций $g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)$, возвращает значения коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_k для аппроксимации линейной комбинацией функций (6.9).

Аппроксимация нелинейными функциями осуществляется в Mathcad с помощью функции $\text{genfit}(X, Y, G, F)$, где G – вектор начальных приближений для всех неизвестных; F – вектор, образованный аппроксимирующей функцией и ее частными производными по всем неизвестным параметрам.

Контрольные вопросы

1. В чем сходство и в чем различие задач аппроксимации и интерполяции данных?
2. Как выбрать наиболее подходящий способ описания таблично заданных данных (интерполяция или аппроксимация)?
3. Приведите примеры практических задач, приводящих к аппроксимации или интерполяции данных.
4. Какие виды интерполяции Вы знаете?
5. Что такое сплайн?
6. Как выбрать вид интерполирующей (аппроксимирующей) функции?
7. Как определить степень интерполяционного (аппроксимирующего) полинома? Можно ли построить интерполяционный полином второй степени по двум, трем, четырем и т. д. узлам?
8. От чего зависит погрешность интерполяции (аппроксимации)?
9. В чем суть метода наименьших квадратов?
10. По заданным значениям $x_i, y_i = f(x_i), i = 0 \dots n$ постройте:
 - а) вспомогательный полином формулы Лагранжа для k -го узла $\omega_k(x)$;
 - б) интерполяционный полином Лагранжа $P_n(x)$;
 - в) аппроксимирующие полиномы первой и второй степеней.
 По формуле Ньютона найдите значение функции в промежуточных точках $0,5(x_i + x_{i+1})$, где $i = 0 \dots n - 1$.

7. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ

Для реализации простой имитационной модели можно использовать алгоритмические языки общего назначения; это позволит получить более быстродействующую модель. В этом случае необходимо разработать средства управления процессом моделирования в машинном времени, сбора и обработки статистических данных о работе модели, генерирования случайных величин с разными законами распределения для моделирования стохастических воздействий, диагностики ошибок при выполнении программы. Такие средства имеются в каком-либо языке программирования или пакете прикладных программ, ориентированном на моделирование.

В случае реализации сложной имитационной модели, имеющей большое количество различных компонентов, предпочтение следует отдать специализированным средствам моделирования.

Поскольку в реальной системе некоторые события могут происходить одновременно, а параллельные процессы могут взаимодействовать друг с другом, в имитационной модели необходим специальный алгоритм управления, обеспечивающий такую организацию машинного времени, которая обеспечивает появление событий (окончание этапов работы моделирующего алгоритма) в надлежащем порядке и с необходимыми интервалами между ними. Таким образом, события при имитации должны разворачиваться во времени в том же порядке, в каком они следуют в реальной системе, но в измененной временной шкале. *Машинное (модельное) время* – арифметическая величина, которая имеет положительные возрастающие значения и отображает ход времени в модели при моделировании.

Существуют два основных механизма модельного времени – задание времени с помощью постоянных и с помощью переменных интервалов времени (или моделирование по особым состояниям).

По *методу постоянного шага* отсчет модельного времени ведется через фиксированные, заранее выбранные исследователем интервалы времени. События в модели считаются наступившими в момент окончания этого интервала.

При *моделировании по особым состояниям* модельное время изменяется каждый раз на величину, соответствующую интервалу времени до момента наступления очередного события. В этом случае события обрабатываются поочередно (в порядке их наступления) и регистрируются как одновременные лишь в том случае, если они одновременны в действительности.

Метод фиксированных шагов предпочтительнее, если невозможно заранее установить, какие из событий являются существенными, события появляются регулярно, их распределение во времени достаточно равномерно, количество событий велико, а продолжительность отдельного события мала.

Метод моделирования по особым состояниям целесообразно использовать, если события распределяются во времени неравномерно или их продолжительность велика, а также при моделировании статических систем или систем периодического действия, в которых события могут длительное время не наступать.

Структура программы (блок-схема алгоритма) должна соответствовать структуре имитационной модели, это делает программу более наглядной и облегчает ее отладку.

Программную реализацию модели рекомендуется строить по *модульному принципу*. Это дает возможность усовершенствовать модель с помощью итерационного метода, добавляя к ней модуль за модулем. В процесс наладки и проведения экспериментов некоторые модули можно изменить или заменить, и это не приведет к существенным изменениям модели в целом. Каждый модуль программы должен сопровождаться комментарием.

Для оценки правильности функционирования программной реализации модели проводят пробные эксперименты (тестирование программы). В случае несоответствия процессов функционирования объекта и модели программу корректируют. При этом необходимо проверить работоспособность программы во всем диапазоне изменения входных переменных.

Одной из наиболее популярных систем математических расчетов и моделирования является Mathcad.

С помощью пакета Mathcad можно решать такие задачи:

- выполнять операции с матрицами, векторами и скалярными величинами действительного и комплексного типов;
- решать алгебраические задачи;
- раскладывать функции в степенные ряды;
- осуществлять логические операции;
- выполнять интегрирование и дифференцирование функций;
- выполнять преобразования Фурье и Лапласа;
- решать системы дифференциальных уравнений;
- проводить статистические вычисления и анализ;
- интерполировать и аппроксимировать функции, заданные таблично;
- решать задачи, связанные с поиском глобального экстремума целевой функции.

В пакете Mathcad используется в упрощенном виде ядро символьной математики системы Maple, что дает возможность выполнять символьные операции с математическими выражениями (упрощение, раскрытие скобок, приведение к общему знаменателю, разложение на множители и др.), а также получать результаты вычислений в аналитическом виде.

Mathcad предоставляет широкие возможности визуализации результатов моделирования с помощью двумерных и трехмерных графиков, а также позволяет проводить анимацию для наглядного отображения динамики поведения моделируемой системы.

В библиотеке Mathcad собрано большое количество стандартных функций, в том числе для чтения – записи файлов данных, обработки изображений, интерполяции, аппроксимации, построения регрессии, статистической обработки, генерирования случайных данных. Кроме того, Mathcad позволяет создавать пользовательские функции и подпрограммы-функции с использованием операторов программирования:

- «for» – оператор безусловного цикла (по диапазону изменения индексной переменной);
- «while» – оператор условного цикла (пока справедливо условие продолжения итераций);
- «if» – условный оператор (если);
- «otherwise» – условный оператор (иначе);
- «continue» – оператор перехода к следующей итерации;
- «break» – оператор прерывания;
- «return» – оператор возвращения результата и др.

При стохастическом моделировании в Mathcad имеется возможность расчета значений плотностей распределения вероятностей и значений интегральных функций для широкого ряда распределений: биномиального, равномерного, экспоненциального, бета-, гамма-, χ^2 -распределений, распределений Стьюдента, Фишера, Вейбулла и др., а также получения массивов случайных чисел с заданным законом распределения.

7.1. Методы моделирования случайных факторов

Влияние случайных факторов на систему моделируют с помощью случайных чисел, вероятностные характеристики которых (вероятность событий, математическое ожидание и дисперсия случайных величин и т. п.) должны быть близки (в идеале – совпадать) аналогичным параметрам реальной системы или процесса.

При стохастическом моделировании особую роль играют случайные числа, распределенные равномерно в интервале $[0, 1]$, так как с их помощью можно получить выборочные значения с любым другим распределением, промоделировать случайное событие или случайный процесс с различными статистическими свойствами.

7.1.1. Имитация значений стандартной равновероятной величины

Для получения реализаций равновероятных на интервале $[0, 1]$ случайных чисел можно применить мультипликативный алгоритм, состоящий в следующем:

- 1) задают стартовое случайное число x_0 , принадлежащее интервалу $[0, 1]$ и не кратное 2, 3, 5, например $x_0 = 0,673783$;

2) умножают x_0 на коэффициент k , значение которого может быть произвольным, однако, как показали исследования, среди множества двузначных чисел только два из них – 37 и 73 – обеспечивают устойчивую работу алгоритма;

3) в полученном значении выделяют дробную часть, которая и есть новое случайное число:

$$x_i = x_{i-1} \cdot k - \text{floor}(x_{i-1} \cdot k), \quad (7.1)$$

где $\text{floor}(\bullet)$ – функция выделения целой части числа в системе Mathcad;

4) действия, изложенные в пп. 2 и 3, повторяют N раз, где N – требуемое количество реализаций стандартной равномерно распределенной величины.

В Mathcad имеется встроенная процедура генерации таких чисел – функция $\text{rnd}(1)$.

7.1.2. Моделирование независимых случайных событий

Пусть случайное событие A может произойти с вероятностью $P(A) = p$. Если r_i – значения стандартной равновероятной величины с плотностью распределения $f(r)=1$, то при условии $r_i \leq p$ (рис. 7.1) настанет событие A , а при $r_i > p$ – событие \bar{A} (НЕ A):

$$P(r < p) = \int_0^p f(r)dr = p = P(A).$$

Отсюда следует алгоритм моделирования случайных событий, показанный на рис. 7.2.

При N обращениях к генератору случайных чисел будет симитировано наступление M событий; при этом $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} = P(A)$.

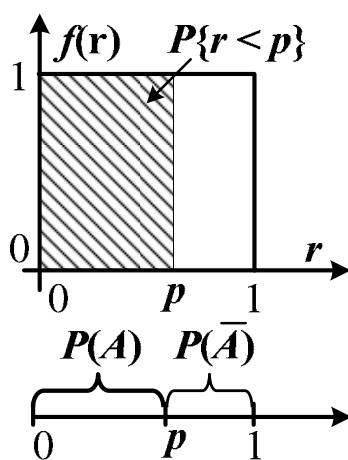


Рис. 7.1. Моделирование случайного события

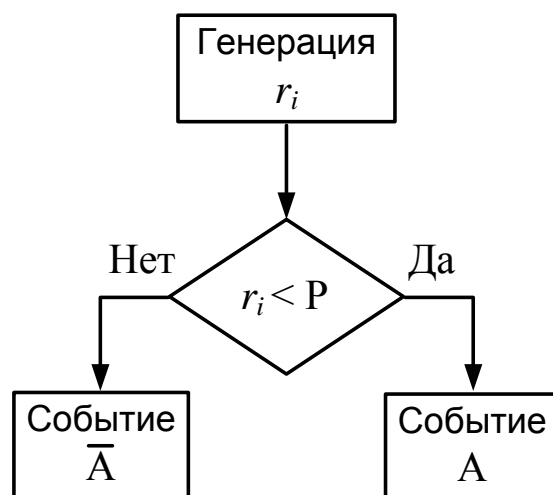


Рис. 7.2. Алгоритм моделирования случайного события

7.1.3. Моделирование сложных событий

Допустим, событие C – сложное событие, заключающееся в том, что одновременно должны произойти два простых независимых события: A с вероятностью $P(A)$ и B с вероятностью $P(B)$. При этом возможны четыре варианта исхода: $C=A \cap B$, $C=\bar{A} \cap B$, $C=A \cap \bar{B}$, $C=\bar{A} \cap \bar{B}$. Для моделирования таких событий необходимо последовательно получить два стандартных равновероятно распределенных числа r_1 и r_2 , по которым будет определяться результирующее событие согласно алгоритму, показанному на рис. 7.3.

Если же события A и B – зависимые, то для моделирования нужно знать условную вероятность $P(B|A)$, которая используется вместо $P(B)$ при проверке условия $r_2 < P(B|A)$.

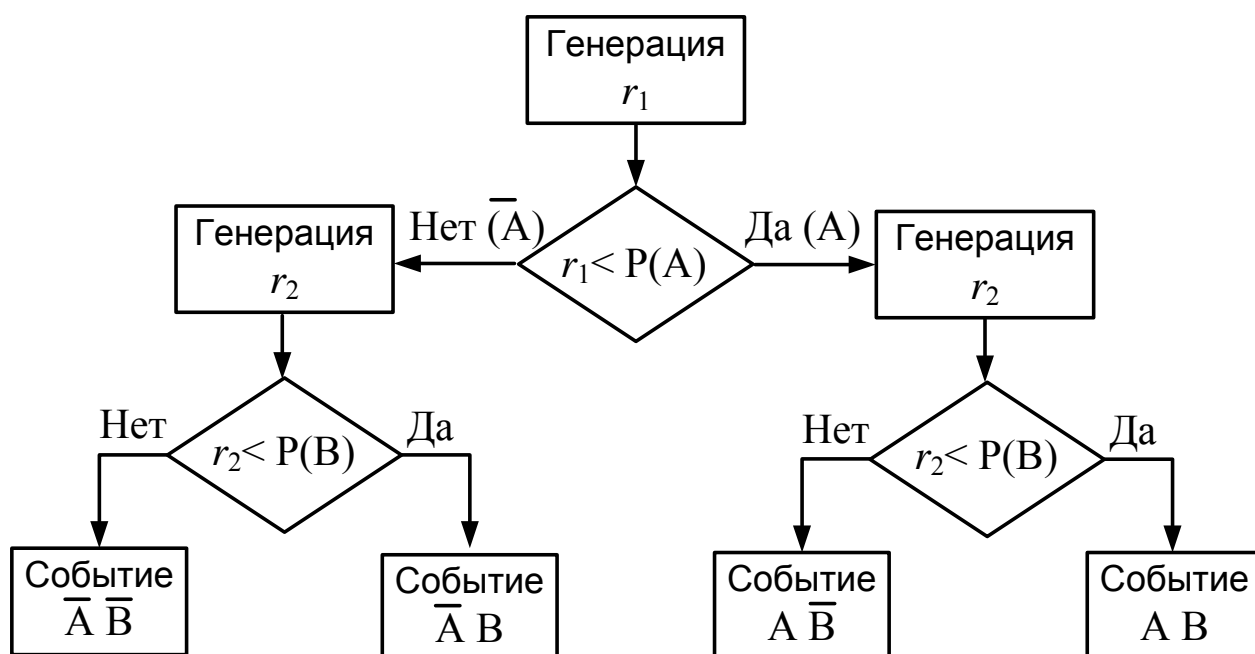


Рис. 7.3. Алгоритм моделирования сложных событий

7.1.4. Моделирование условных событий

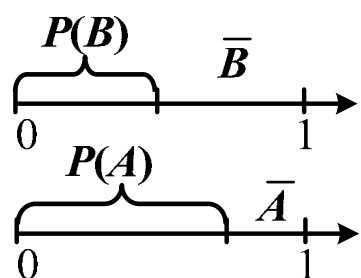


Рис. 7.4. Моделирование условного события

Условное событие A – это событие, которое происходит с вероятностью $P(A|B)$ только при условии, что произошло событие B ; при этом вероятность $P(B)$ наступления события B должна быть задана (рис. 7.4). Тогда вероятность A

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Моделирование условного события A выполняют по алгоритму, показанному на рис. 7.5.

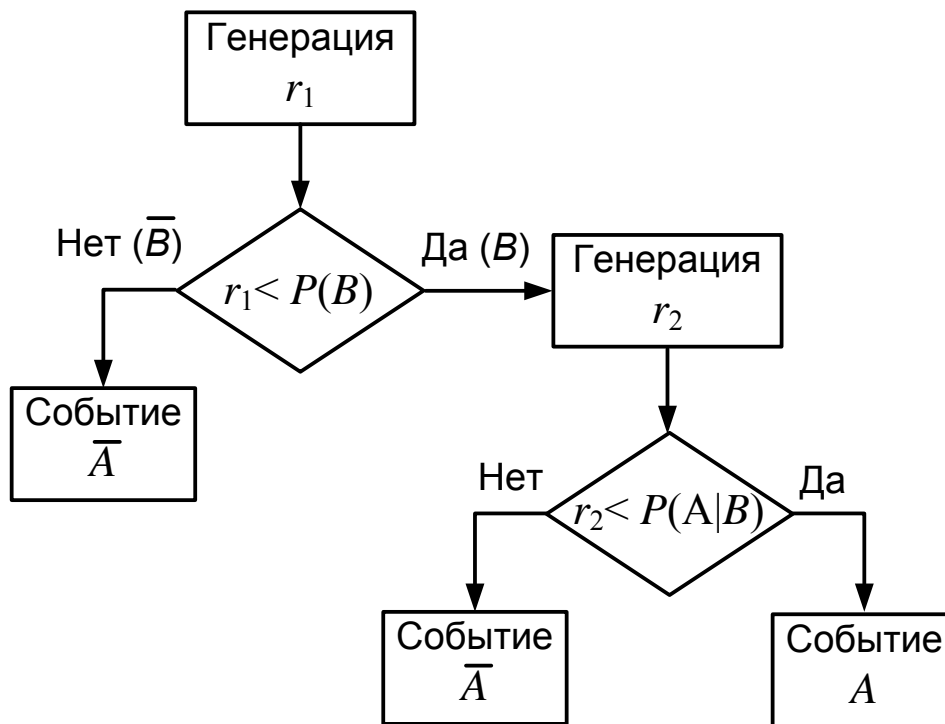


Рис. 7.5. Алгоритм моделирования условных событий

7.1.5. Моделирование дискретных случайных величин

Дискретная случайная величина X принимает конечное или счетное множество дискретных значений x_k , $k = 1 \dots K$ с заданными вероятностями p_k , причем

$$\sum_{k=1}^K p_k = 1. \quad (7.2)$$

Для формирования реализаций такой величины генерируют значения стандартных равномерно распределенных чисел r_i и циклически ($k = 1 \dots K - 1$) проверяют условие $r_i < \sum_{j=1}^k p_j$. Если неравенство выполняется, то принимают $X = x_k$. Очевидно, что проверка неравенства при $k = K$ не нужна в силу (7.2).

Алгоритм моделирования дискретной случайной величины показан на рис. 7.6.

Описанную процедуру называют определением результата испытания по жребию. Она часто используется в теории принятия решений и хорошо воспроизводит процесс выбора одной из множества альтернатив.

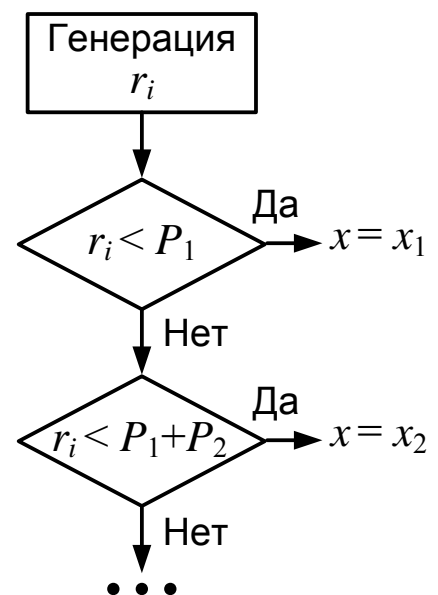


Рис. 7.6. Алгоритм моделирования дискретных случайных величин

7.1.6. Моделирование непрерывных случайных величин

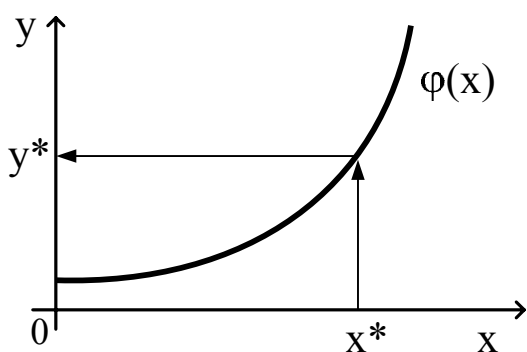


Рис. 7.7. Функциональное преобразование случайной величины

Пусть имеется случайная величина x с плотностью распределения вероятностей $f(x)$.

Случайная реализация x^* может быть трансформирована в величину y^* посредством непрерывного функционального преобразования $y = \varphi(x)$ (рис. 7.7).

Случайная величина y характеризуется распределением $f(y)$.

В силу непрерывности преобразования $\varphi(x)$ соблюдается условие

$$P\{x_i < x\} = P\{y_i < y\} \text{ или } F(x) = F(y),$$

где x_i, y_i - реализации величин x и y , при этом $y_i = \varphi(x_i)$, или

$$\int_{-\infty}^{x^*} f(x)dx = \int_{-\infty}^{y^*} f(y)dy. \quad (7.3)$$

Если x – стандартная величина r , равномерно распределенная на интервале $[0, 1]$, то из соотношения (7.3) получаем

$$r = \int_{-\infty}^{y^*} f(y)dy. \quad (7.4)$$

Решением уравнения (7.4) относительно y является функция преобразования $\varphi(r)$, необходимая для получения по реализации r_i стандартной случайной величины r реализации y_i случайной величины y с требуемым законом распределения $f(y)$.

Уравнение (7.4) можно записать в виде

$$r = F(y), \quad (7.5)$$

а его решение –

$$y = F^{-1}(r), \quad (7.6)$$

где F^{-1} – функция, обратная интегральной функции распределения.

Данный метод моделирования непрерывных случайных величин с заданным распределением называется *методом обратной функции*.

Если в качестве исходных данных задана плотность распределения $f(y)$, то необходимо аналитически получить выражения

$$F(y) = \int_{-\infty}^y f(y)dy \text{ и } y = F^{-1}(r),$$

после чего по реализации стандартных равновероятных чисел r_i , может быть получена реализация случайной величины $y_i = F^{-1}(r_i)$, как показано на рис. 7.8.

Например, для экспоненциального закона распределения $f(y) = \lambda e^{-\lambda y}$ функция распределения имеет вид

$$F(y) = 1 - e^{-\lambda y}.$$

Из равенства $F(y) = r$ получаем обратную функцию

$$y = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 - r).$$

Тогда алгоритм получения реализаций случайной величины y , распределенной по экспоненциальному закону, с учетом симметричности равномерного закона распределения будет иметь вид

$$y_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(r_i).$$

Методом обратной функции могут быть получены случайные величины с любым интегрируемым законом распределения. Однако явная обратная функция $F^{-1}(\bullet)$ существует не для всех законов распределения. В таких случаях применяют другие методы формирования реализаций, основанные на частных свойствах распределения.

Так, *метод композиции* основан на теоремах теории вероятностей, доказывающих представимость одной случайной величины композициями (как правило, линейными) двух или большего числа других случайных величин, имеющих легко реализуемые законы распределения.

Известным примером применения метода композиции является представление нормально распределенной случайной величины суммой $n > 10$ реализаций r_j стандартной равновероятной величины. Такой подход базируется на центральной предельной теореме.

Алгоритм формирования реализаций y_i с нормальным распределением $N(y; m, \sigma)$ строят таким образом:

1) берут n независимых реализаций величины r , равномерно распределенной в интервале $[0, 1]$:

$$\{r_j\}, \quad j = 1 \dots n;$$

2) формируют сумму

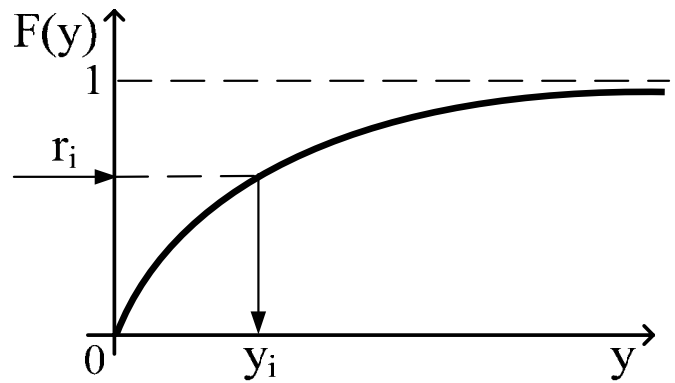


Рис. 7.8. Моделирование непрерывных случайных величин методом обратной функции

$$z = \sum_{j=1}^n r_j,$$

которая распределена нормально и имеет параметры

$$m_z = \frac{n}{2}, \quad \sigma_z = \sqrt{\frac{n}{12}};$$

3) центрируют и нормируют величину z , сводя ее к стандартной нормальной величине z_0 с распределением $N(z_0; 0, 1)$:

$$z_0 = \frac{z - m_z}{\sigma_z};$$

4) величину z_0 преобразовывают в нормально распределенную случайную величину y с распределением $N(y; m, \sigma)$:

$$y = m + \sigma \cdot z_0;$$

5) записывают алгоритм формирования реализаций

$$y_i = m + \sigma \cdot \sqrt{\frac{12}{n}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n r_j - \frac{n}{2} \right). \quad (7.7)$$

Наиболее удобна форма алгоритма (7.7) при $n=12$ и $n=48$:

$$y_i = m + \sigma \cdot \left(\sum_{j=1}^{12} r_j - 6 \right), \quad y_i = m + \frac{\sigma}{2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{48} r_j - 24 \right).$$

В первом случае получается быстрый алгоритм со средней точностью формирования случайных чисел с нормальным распределением, во втором – более медленный при более высокой точности.

Основные алгоритмы моделирования непрерывных случайных величин приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Распределение	Параметры	Алгоритм генератора
Равномерное	$a, b; b > a$	$a + (b - a) \cdot r$
Экспоненциальное	$\lambda > 0$	$-\ln(r)/\lambda$
Нормальное	$m, \sigma > 0$	$m + \frac{\sigma}{2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{48} r_j - 24 \right)$
Гамма-распределение	$\alpha > 0, \beta > 0$	Для целых α $-\frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{\alpha} \ln(r_j)$
Рэля	$\sigma > 0$	$\sqrt{-2\sigma^2 \ln(r)}$

7.1.7. Моделирование случайных величин с произвольным эмпирическим распределением

Пусть задана выборка $\{x_i\}$ объемом N реализаций случайной величины x , закон распределения которой априори не известен.

Для моделирования такой величины можно использовать подход, базирующийся на методе обратной функции (7.6). При этом оценкой неизвестной интегральной функции распределения $F(x)$ служит кусочно-линейная аппроксимация кумулятивной функции распределения, полученной по выборке.

Алгоритм формирования реализаций случайной величины x с эмпирическим распределением строят таким образом:

1) получают гистограмму \hat{f}_k выборочных данных с числом интервалов M , $k = 1 \dots M$;

2) находят оценки функции распределения $\hat{F}_k = \sum_{i=0}^k \hat{f}_i$ в точках d_k , соответствующих границам интервалов гистограммы, $k = 0 \dots M$;

3) переходят к системе координат, в которой по оси абсцисс (OX) откладывают значения функции распределения, а по оси ординат (OY) – значения моделируемой случайной величины;

4) по точкам с координатами (\hat{F}_k, d_k) выполняют кусочно-линейную аппроксимацию функции, обратной эмпирической функции распределения $\hat{F}^{-1}(x)$.

В пакете Mathcad для этого служит функция $\text{linterp}(X, Y, z)$, где X – имя массива, содержащего узлы интерполяции; Y – имя массива значений интерполируемой функции в узлах; z – промежуточная точка интервала интерполяции или имя массива точек, в которых надо найти значения интерполируемой функции;

5) подставляя в аппроксимирующую функцию в качестве аргумента числа r_i , сгенерированные датчиком стандартной равновероятной величины, получаем нужное количество реализаций случайной величины $x_i = \hat{F}^{-1}(r_i)$.

Рассмотрим реализацию данного алгоритма в Mathcad.

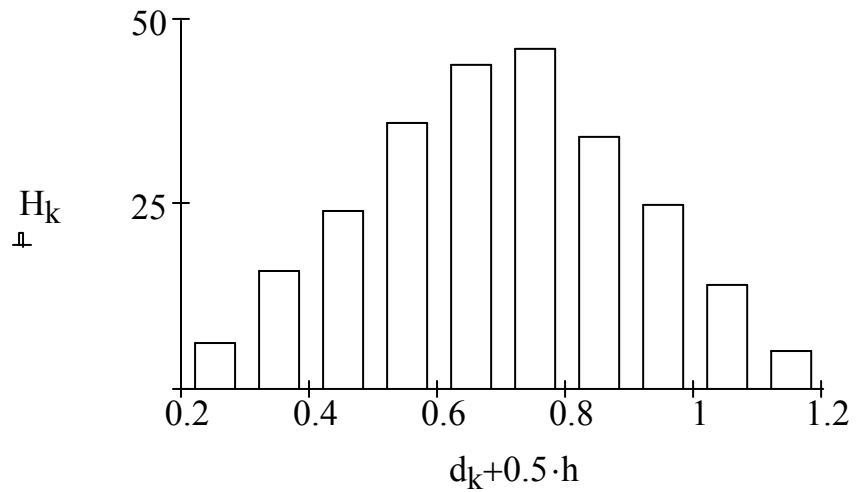
Пусть получен массив H , представляющий количество попаданий случайной величины x в интервалы с координатами $d_k = x_{\min} + h \cdot k$, $k = 0 \dots M$, где $x_{\min} = 0.2$ – минимальное значение x ; $h = 0.1$ – ширина интервала; M – количество интервалов.

Введем эти данные в Mathcad и построим гистограмму частот H :

$$M := 9 \quad k := 0..M \quad h := 0.1 \quad d_k := 0.2 + h \cdot k$$

$$H_k :=$$

6
16
24
36
44
46
34
25
14
5



Определим подпрограмму-функцию $FI(H)$, вычисляющую значения интегральной (кумулятивной) функции распределения в точках координат интервалов гистограммы:

$$FI(H) := \left| \begin{array}{l} p_0 \leftarrow 0 \\ \text{sum} \leftarrow \sum_{j=0}^{\text{last}(H)} H_j \\ \text{for } i \in 1.. \text{last}(H) + 1 \\ \quad p_i \leftarrow p_{i-1} + \frac{H_{i-1}}{\text{sum}} \\ p \end{array} \right.$$

Получим массив из $M+1$ значения функции распределения

$$F := FI(H) \quad k := 0..10$$

и построим ее график (для визуализации табулированных функций используем тип линий графика «point»).

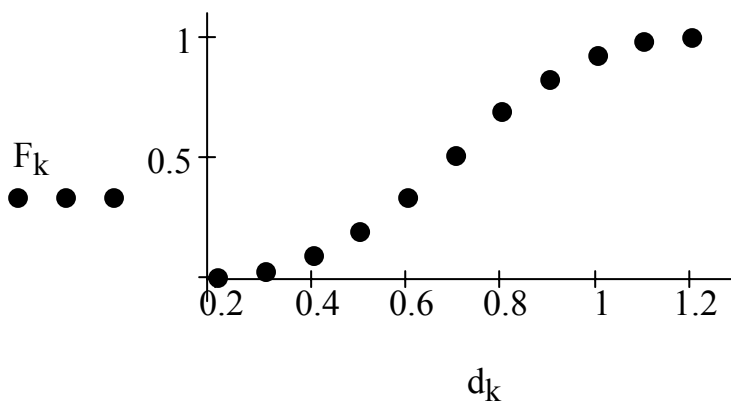
Определим пользовательскую функцию $\text{fit}(z)$ для нахождения значений кусочно-линейной аппроксимации функции, обратной функции распределения, в некоторой промежуточной точке z .

Для этого используем встроенную функцию $\text{linterp}(X, Y, z)$, в которую на место аргумента X подставим F (массив значений функции распределения), а на место $Y - d$ (массив координат узлов интерполяции):

0
0.024
0.088
0.184
0.328
0.504
0.688
0.824
0.924
0.98
1

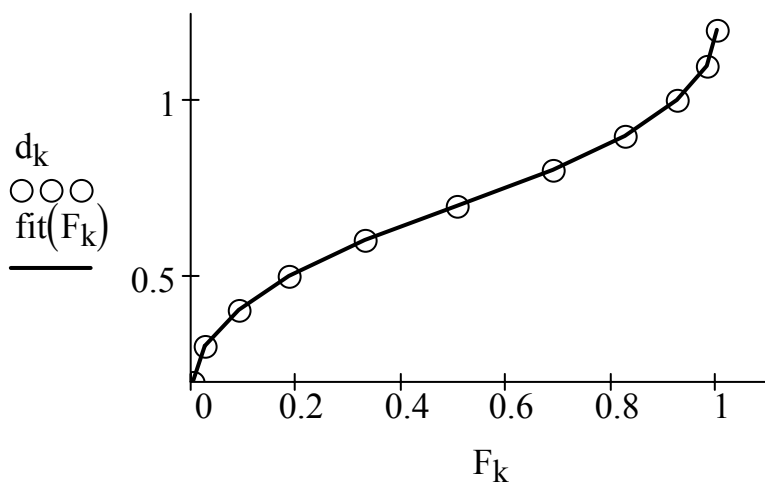
$FI(H) =$

Функция распределения



$fit(z) := \text{linterp}(F, d, z)$

Построим график результатов интерполяции обратной функции:

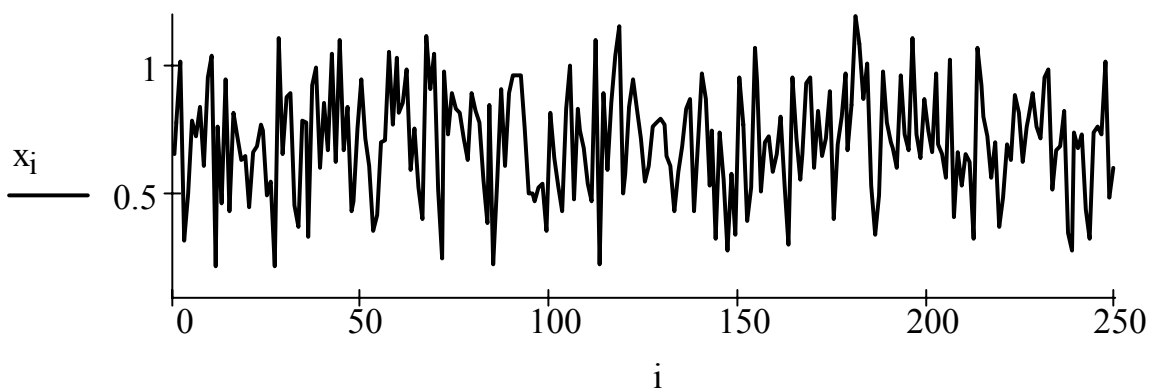


Выполним моделирование N реализаций величины x с заданным эмпирическим распределением по методу обратной функции:

$N := 250 \quad i := 0..N - 1$

$x_i := \text{fit}(\text{rnd}(1))$

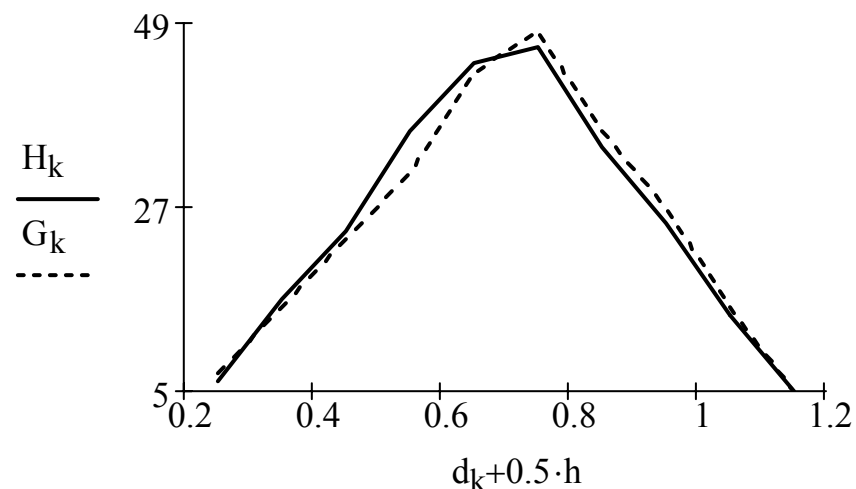
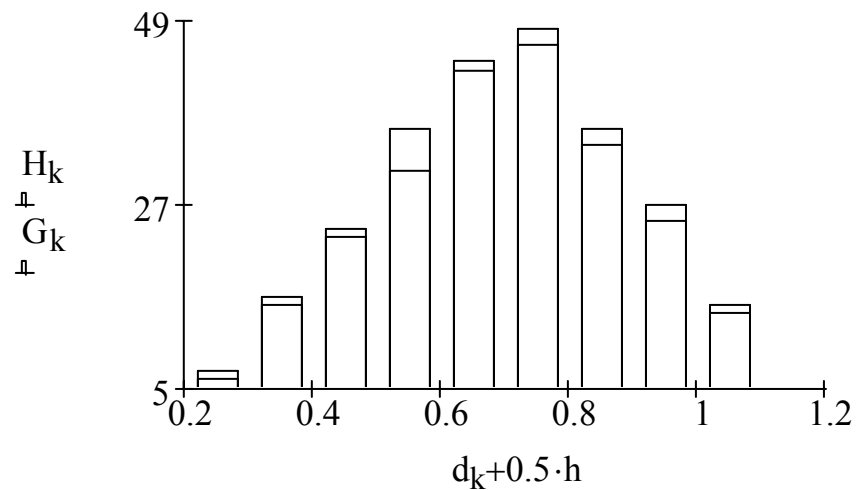
Результаты моделирования представим графически:



Найдем частоты попадания результатов моделирования (массива x) в заданные интервалы (d_k):

$$G := \text{hist}(d, x)$$

Сравним результаты моделирования с заданными данными, совместив на одном графике массивы G и H в виде ступенчатых фигур (тип линий «bar») и в виде линий (тип «line»). Графическое сравнение позволяет сделать вывод о приемлемом качестве результатов моделирования, так как G и H на графике отличаются незначительно:



Для количественной оценки качества работы генератора случайной величины с заданным эмпирическим распределением можно использовать оценку относительной погрешности количества попаданий в интервал гистограммы:

$$\delta_k = \frac{|H_k - G_k|}{H_k} \cdot 100\%, \quad (7.8)$$

где H_k – заданное количество попаданий в k -й интервал гистограммы; G_k – фактическое количество попаданий в k -й интервал гистограммы по данным статистической обработки результатов моделирования.

В качестве критерия качества можно принять максимальное $\delta_{\max} = \max(\delta_k)$ или среднее $\delta_{cp} = \text{mean}(\delta_k)$ значение относительной погрешности (7.8). Если критерий не превышает по величине некоторого допустимого значения δ_D , то считают, что распределение результатов моделирования с допустимой точностью соответствует заданному закону распределения. Для критерия δ_{\max} величину δ_D обычно выбирают от 50 до 100% (при этом требуется, чтобы количество попаданий реализаций в интервал гистограммы $n_k \geq 5$). Для критерия δ_{cp} допустимым значением может быть 15...30%.

7.1.8. Моделирование случайных векторов

Пусть необходимо получить векторную случайную величину $\vec{y}^T = (y_1, \dots, y_p)$ с заданным математическим ожиданием $\vec{M}_y^T = (m_1, \dots, m_p)$ и заданной корреляционной матрицей $[\mathbf{R}] = \{R_{ik}\}$, $i, k = 1 \dots p$, $R_{ik} = \sigma_i \cdot \sigma_k \cdot r_{ik}$, где σ_i и σ_k – СКО компонент y_i и y_k ; r_{ik} – нормированный коэффициент корреляции между i -й и k -й компонентами; $r_{kk} = 1$ и $R_{kk} = \sigma_k^2$.

Алгоритм формирования случайного вектора \vec{y} с коррелированными компонентами состоит из таких этапов:

1) по заданной корреляционной матрице $[\mathbf{R}]$ вектора \vec{y} находят p собственных значений $\vec{\lambda}$ и p собственных векторов $[\Phi]$:

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{bmatrix}, [\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \dots & \Phi_{1p} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \dots & \Phi_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Phi_{p1} & \Phi_{p2} & \dots & \Phi_{pp} \end{bmatrix}.$$

В Mathcad для этого имеются встроенные функции: $\text{eigenvecs}(M)$ – возвращает матрицу собственных векторов квадратной матрицы M и $\text{eigenvals}(M)$ – возвращает вектор ее собственных значений;

2) генерируют N реализаций p случайных величин x_{ij} ($i = 1 \dots p$, $j = 1 \dots N$) с заданным распределением, из которых формируют матрицу $[\mathbf{X}]$ размером $p \times N$ некоррелированных величин x_{ij}^0 с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией:

$$[\mathbf{X}] = \{\bar{x}\}_N = \{x_{ij}^0\}_{p \times N}, \quad x_{ij}^0 = \frac{x_{ij} - m_i}{\sigma_i}, \quad i = 1 \dots p;$$

3) выполняют преобразование, позволяющее получить по N отсчетам некоррелированного вектора \bar{x} с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией N реализаций вектора \bar{y} с заданной корреляционной матрицей и заданным вектором математического ожидания:

$$[\mathbf{Y}] = [\Phi][\Lambda]^{1/2}[\mathbf{X}] + \vec{M}_y, \quad (7.9)$$

где $[\Lambda]^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_i})$ – диагональная матрица, $i = 1 \dots p$.

Матрично-векторное уравнение (7.9) можно представить в скалярном виде. Обозначим через $[\mathbf{A}]$ матрицу преобразования корреляции:

$$[\mathbf{A}] = [\Phi][\Lambda]^{1/2}, \quad [\mathbf{A}] = \{A_{ik}\}_{p \times p}, \quad i = 1 \dots p, \quad k = 1 \dots p. \quad (7.10)$$

Тогда уравнению (7.9) эквивалентна система уравнений, описывающих формирование j -го отсчета i -й компоненты вектора \bar{y} :

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^p A_{ik} x_{kj} + m_i. \quad (7.11)$$

7.1.9. Моделирование случайных процессов

Рассмотренный выше подход к формированию случайных векторов может быть применен для формирования реализаций стационарного случайного процесса $x(t)$, отсчеты которого $x(t_i)$ имеют статистическую взаимосвязь, т. е. являются коррелированными.

Случайный процесс называют *стационарным в широком смысле (слабостационарным)*, если его математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а корреляционная функция зависит не от момента времени t_1 , а только от интервала времени $\tau = t_2 - t_1$:

$$m_x(t) = m_x, \quad \sigma_x^2(t) = \sigma_x^2, \quad R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) = R_x(t_2 - t_1).$$

Случайный процесс называют *стационарным в узком смысле (строго стационарным)*, если в дополнение к указанным выше условиям от времени также не зависит и функция распределения первого порядка $F(x, t) = F(x)$, а функция распределения второго порядка зависит не от моментов времени t_1 и t_2 , а от их разности $\tau = t_2 - t_1$:

$$F_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = F_2(x_1, x_2, t_1 + \tau, t_2 + \tau) = F_2(x_1, x_2, t_2 - t_1).$$

Стационарный СП называют *эргодическим*, если его числовые характеристики, полученные усреднением по множеству реализаций, совпадают (по вероятности) с теми же характеристиками, полученными усреднением по времени одной достаточно длинной реализации $x_k(t)$.

Последовательность отсчетов процесса $x(t)$ можно представить в виде n -мерного вектора $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ (рис. 7.9). Размерность n этого вектора определяется *радиусом (интервалом) корреляции* случайного процесса – это промежуток времени, в течение которого максимум АКФ спадает до 5%, после чего СП можно считать некоррелированным.

Если радиус корреляции равен T , а шаг дискретизации по времени – Δt , то размерность вектора $n = T/\Delta t$.

Например, задана АКФ $R(\tau)$, показанная на рис. 7.10. Радиус корреляции равен $3\Delta t$, следовательно, $n = 3$. Тогда $R(\tau)$ можно записать в виде корреляционной матрицы:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,1 \\ 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0,1 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Этапы алгоритма моделирования СП $x(t)$ с заданным законом распределения $f(x)$ и корреляционной функцией $R(\tau)$ такие:

- 1) генерация последовательности $N + 1$ отсчетов некоррелированной случайной величины y_i с законом распределения $f(x)$;
- 2) формирование корреляционной матрицы $R_{ij} = R[(i - j)\Delta t]$ по заданной корреляционной функции $R(\tau)$;
- 3) выборка первых n из N отсчетов и формирование из них вектора \vec{y} ;
- 4) преобразование \vec{y} в \vec{x} согласно методике моделирования случайных векторов (7.9);
- 5) выборка из n компонент вектора \vec{x} первого из последовательности отсчетов процесса $x(t_1) = x_1$;
- 6) сдвиг входной последовательности y_i на один отсчет;

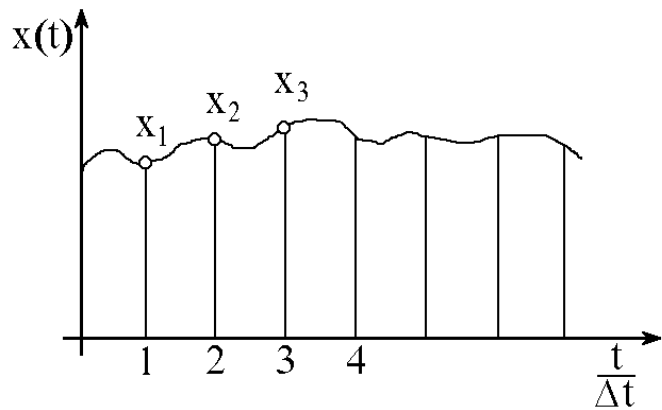


Рис. 7.9. Формирование вектора из отсчетов случайного процесса

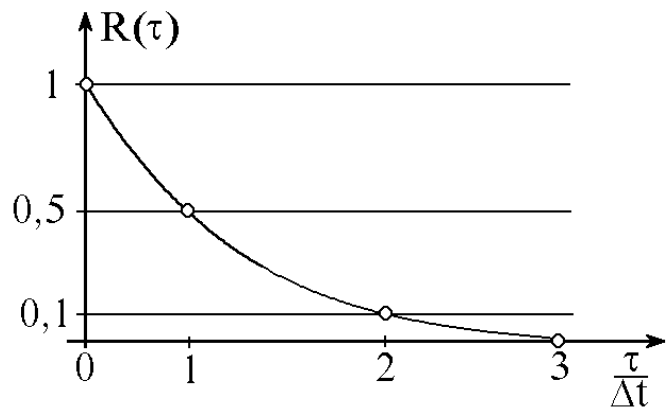


Рис. 7.10. Корреляционная функция случайного процесса

7) повторение пп. 4 – 6 N раз для получения $x_i, i = 1 \dots N$.

Матричный метод применим при моделировании стационарных СП с „короткими” корреляционными функциями, для которых размерность вектора невысока.

Более эффективный метод моделирования СП – спектральный, основанный на применении преобразования Фурье.

Поскольку согласно теореме Винера–Хинчина корреляционная функция $R(\tau)$ случайного процесса связана с его энергетическим спектром $S_x^2(\omega)$ через преобразование Фурье

$$S_x^2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = F\{R(\tau)\}, \quad (7.12)$$

то по АКФ $R(\tau)$ может быть определен энергетический спектр (спектральная плотность мощности) $S_x^2(\omega)$. Тогда методика моделирования состоит из таких этапов:

- 1) моделирование некоррелированной выборки $y_i, i = 1 \dots N$ с заданным законом распределения;
- 2) нахождение по корреляционной функции формы требуемого спектра $S_x(\omega)$;
- 3) нахождение спектра процесса $y(t)$ как $Y(\omega) = F\{y(t)\}$;
- 4) нахождение спектра процесса $x(t)$ как $X(\omega) = S_x(\omega) \cdot Y(\omega)$;
- 5) вычисление реализации процесса

$$x(t) = F^{-1}\{X(\omega)\}.$$

Недостаток данного метода – отсутствие информации о фазовом спектре, из-за чего имеет место неточное формирование корреляционной функции. Кроме того, при моделировании происходит частичное искажение формы и параметров закона распределения.

Контрольные вопросы

1. Как осуществляется выбор средств моделирования?
2. Что такое машинное время? Каким образом можно его задать?
3. Какие возможности для моделирования и обработки результатов имитационных экспериментов предоставляет Mathcad?
4. В чем преимущество модульного принципа построения программной реализации модели?
5. В чем состоит алгоритм имитации реализаций дискретной случайной величины?
6. Как статистически оценить вероятность появления отдельных значений дискретной случайной величины?

7. На чем основано моделирование случайных событий?

8. Пусть A и B – независимые случайные события с известными вероятностями их возникновения $P(A)$ и $P(B)$. Смоделируйте ситуации \overline{AB} , $\overline{A}B$, AB , $\overline{A}\overline{B}$. Как изменится алгоритм моделирования случайных событий, если события A и B – зависимые и $P(A|B) = 0,8$?

9. Как получить алгоритм формирования случайных реализаций непрерывной случайной величины?

10. В чем суть метода обратной функции? В каких случаях этот метод неприемлем и почему?

11. Каким образом моделируют случайный вектор, компоненты которого – коррелированные случайные величины?

12. Как найти матрицу преобразования некоррелированного случайного вектора \vec{x} в вектор \vec{y} с заданной корреляционной матрицей $[R]$ и заданным вектором математических ожиданий компонент \vec{m}_y ?

13. Какой случайный процесс называют стационарным?

14. Какие методы моделирования стационарных случайных процессов Вы знаете? В чем достоинства и недостатки каждого метода?

15. Что такое радиус корреляции случайного процесса?

16. Каким образом можно перейти от корреляционной функции $R(\tau)$ к корреляционной матрице $[R]$?

17. Запишите алгоритм моделирования:

а) дискретной случайной величины с заданным законом распределения (рис. 7.11, а);

б) непрерывной случайной величины с заданной плотностью распределения вероятностей (например, $f(x) = 1,5\sqrt{x}$, $x \in [0; 1]$);

в) случайной величины с заданным эмпирическим распределением (рис. 7.11, б);

г) двумерной случайной величины с заданными параметрами распределения: $m_1 = m_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $r_{12} = -0,5$;

д) стационарного случайного процесса с заданной корреляционной функцией $R(\tau) = \exp(-\lambda \cdot \tau) \cos(\omega \cdot \tau)$.

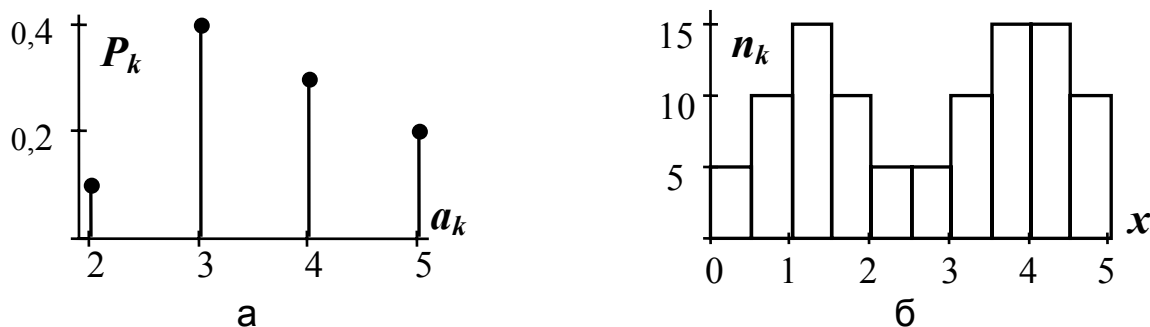


Рис. 7.11. Пример исходных данных для моделирования: а – дискретной случайной величины; б – непрерывной случайной величины

8. ПРОВЕРКА ДОСТОВЕРНОСТИ И АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ

При проверке *достоверности (верификации)* оцениваются точность преобразования формального описания проблемы в описание модели и точность преобразования описания модели из логической блок-схемы в компьютерную программу. Результаты проверки достоверности позволяют ответить на вопрос: правильно ли построена модель?

При проверке *адекватности (валидации)* поведение модели сравнивают с поведением системы: модель должна в пределах области применения работать с требуемой точностью и ее использование должно соответствовать целям моделирования. По результатам проверки адекватности делают вывод о том, является ли правильной построенная модель.

Проверки связаны, прежде всего, с измерением и оцениванием точности при моделировании и имитации.

Точность моделирования определяется разницей между выходными данными системы и модели при условии, что входные данные одинаковы. Модель считают достаточно точной, если ее выходные переменные отличаются от выходных данных моделируемой системы меньше, чем заданные предельные значения.

Критерии оценивания точности

$$E_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - y'_{ij}), \quad (8.1)$$

где y_{ij} и y'_{ij} – j -е значение ($j = 1 \dots n$) i -й выходной переменной ($i = 1 \dots m$) системы и модели, соответственно;

$$E_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F_i(y) - F_i(y')| dy, \quad (8.2)$$

где $F_i(y)$ и $F_i(y')$ – функции распределения для y_{ij} и y'_{ij} ;

$$E_3 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - y'_{ij})^2. \quad (8.3)$$

В случае использования критерия E_1 возможен значительный разброс конкретных j -х значений для величин y_{ij} и y'_{ij} , так как из-за суммирования их отклонений $(y_{ij} - y'_{ij})$, имеющих разные знаки, происходит частичная компенсация погрешности.

При использовании критерия E_2 следует иметь в виду, что получение результатов моделирования, распределения которых идентичны или близки к распределениям выходных данных системы, – необходимое, но недостаточное условие того, что модель является точной во всей области возможных значений входных переменных. При этом вполне возможно, что поведение каких-то процессов в модели отличается от поведения соответствующих процессов в системе.

Более эффективны критерии оценивания, в которых используется распределение разности значений y_{ij} и y'_{ij} , например, E_3 – среднее арифметическое квадратов разности значений.

Таким образом, при итерационном проектировании на основании результатов наблюдений за входными факторами \vec{x} и выходными переменными системы \vec{y} и модели \vec{y}' необходимо построить оптимальную (в смысле выбранного критерия E_1, E_2 , или E_3) математическую модель (рис. 8.1). С помощью метода наименьших квадратов по данным эксперимента строят модели типа «вход-выход», регрессии различных порядков. Если структура модели известна («серый ящик»), то задачей наладки является нахождение оптимальных оценок параметров модели, при которых функция критерия минимальна.

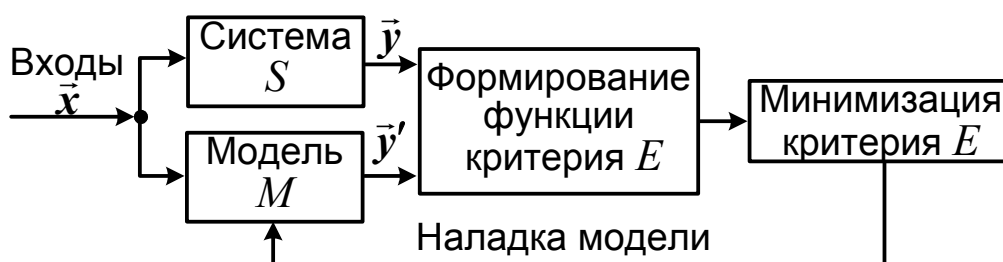


Рис. 8.1. Общая схема итерационного проектирования модели

При проверке точности модели большое значение имеет ее тестирование, по результатам которого выявляют наличие в модели ошибок или погрешностей, а также определяют, правильно ли она функционирует. Проверки и тестирование позволяют идентифицировать и исправлять качественные неточности на всех этапах моделирования путем циклического повторения тех этапов, где были обнаружены ошибки. При исследованиях модель должна математически и логически, с определенной степенью приближения воспроизводить моделируемую систему, процесс или явление. Входные данные должны содержать всю необходимую информацию о системе.

Оценку достоверности на уровне концепции начинают с анализа концептуальной модели, возвращаются к принятым аппроксимациям и упрощениям, а затем рассматривают реальный процесс.

Проверку достоверности модели на уровне ее реализации начинают с логической схемы (алгоритма работы модели), переходят к схеме программы, а затем рассматривают программную реализацию. Для этого программу вновь преобразуют в логическую схему, а затем проверяют отдельные ее модули и всю программу в целом, используя специально подобранные тесты. Каждый тест содержит набор исходных данных, для которых известен результат. Если результаты работы программы с данным тестом отличаются от ожидаемых, то это свидетельствует о наличии ошибки. При этом тест стараются выбрать так, чтобы он помог не только

установить сам факт ошибки, но и локализовать эту ошибку. На заключительном этапе проверки правильности модели осуществляют контрольные прогоны – для оценки чувствительности модели к изменениям входных данных и для проверки правильности работы имитационной модели. При оценке чувствительности обычно определяют, насколько изменяется выходной параметр y при изменении i -го входного параметра при фиксированных значениях остальных входных факторов. В случае выявления чувствительности модели к некоторым входным данным необходимо уточнить эти данные и откорректировать те блоки модели, на которые они влияют в наибольшей степени, т. е. перейти к более детализированному описанию этих блоков.

Окончательную наладку модели выполняют на контрольных заданиях. Совпадение результатов моделирования и контрольных вариантов свидетельствует о корректности модели к заданиям данного типа. Контрольные задания можно построить при упрощенных входных данных, когда заранее известно, как должна себя вести моделируемая система и какие результаты должны быть на выходе. С этой же целью можно упростить имитационную модель до такого уровня, который позволит построить аналитическую модель. Тогда можно сравнивать результаты имитационного моделирования и аналитические расчеты, но только в пределах упрощенной модели. Кроме того, при проверке адекватности используют контрольные задания, составленные по результатам работы реальной системы, если она существует.

Контрольные вопросы

1. Почему на каждом из этапов разработки модели могут быть допущены ошибки?
 2. В чем различие между понятиями «достоверность» и «адекватность»?
 3. Перечислите известные Вам критерии оценивания точности. Какой из критериев является наиболее эффективным и почему?
 4. Может ли модель одновременно являться:
 - а) адекватной, но недостоверной;
 - б) достоверной, но неточной;
 - в) точной, но неадекватной?
- Ответы обоснуйте.
5. На каких этапах проектирования модели необходимо выполнять проверку ее достоверности (адекватности)?
 6. В чем заключается наладка математической модели и как эту наладку осуществляют?
 7. Каким образом можно выявить ошибку в программе?
 8. Является ли правильная работа программы доказательством адекватности (достоверности) построенной модели? Почему?

9. ПЛАНИРОВАНИЕ ИМИТАЦИОННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

9.1. Факторный план

Целью имитационных экспериментов является более глубокое изучение моделируемых систем при ограниченных затратах. Следовательно, необходимо планировать и проектировать не только модель системы, но и процесс проведения экспериментов с ней.

В практике имитационных исследований наиболее распространены такие типы экспериментов:

- определение значимости влияния тех или иных факторов и необходимости их учета при исследовании конкретной системы;
- отыскание оптимальных альтернатив (в частности, стратегий управления) на некотором множестве возможных значений.

Формализованную общую схему эксперимента можно представить таким образом.

Пусть некоторая система имеет k контролируемых входов $\vec{X} = (x_1, \dots, x_k)$, называемых *факторами*.

Вектор \vec{X} изображается точкой в k -мерном пространстве переменных x_j (в *факторном пространстве*).

Эксперимент называют *активным*, если исследователь по своему усмотрению может изменять значения (уровни) факторов. В противном случае (исследователь лишь контролирует уровни факторов, но не управляет ими) эксперимент называют *пассивным*.

Обозначим: i – номер опыта ($i = 1 \dots n$); \vec{x}_i – комплекс условий i -го опыта; x_{ij} – уровень j -го фактора в i -м опыте.

Система имеет также γ входов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\gamma$, которые в имитационной модели полагают случайными и задают в процессе имитации с помощью датчиков случайных чисел (имитаторов). Управлять этими входами в силу их случайности исследователь не может.

Система характеризуется $(\nu + 1)$ выходными параметрами $y, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\nu$, причем y – основной параметр (в частности, показатель эффективности). Основным выходным параметром y (наблюдаемая переменная) является скалярной величиной; при этом предполагается, что имеет место такая модель наблюдения:

$$y = \psi(\vec{X}) + \varepsilon(\vec{X}), \quad (9.1)$$

где $\psi(\vec{X})$ – *функция отклика* (неслучайная функция факторов); $\varepsilon(\vec{X})$ – *ошибка опыта* (случайная величина, распределение которой определяется значением вектора \vec{X} , причем $M\{\varepsilon(\vec{X})\} = 0$).

Очевидно, y является случайной переменной, так как зависит от случайной величины $\varepsilon(\vec{X})$.

Остальные v выходных параметров в общем случае также зависят от входов и в процессе эксперимента должны находиться в некоторых пределах, задаваемых, например, системой неравенств:

$$\varphi_{\alpha}[\nu(\vec{X})] \leq 0, \alpha = 1 \dots a. \quad (9.2)$$

Система неравенств (9.2) выделяет в факторном пространстве область эксперимента G (область допустимых значений факторов).

Функция отклика $\psi(\vec{X})$ математически отражает механизм изучаемого явления (поведение исследуемой системы).

Общая задача эксперимента с моделью системы – получение информации о функции отклика. Наиболее важными являются экспериментальные исследования с помощью моделей, направленные на отыскание значений x_1, x_2, \dots, x_k управляемых факторов, для которых основной выходной параметр y достигает своего экстремального значения.

В процессе экстремального эксперимента при фиксированных значениях управляемых факторов наблюдают значение переменной y . По значению (или по нескольким значениям) этой переменной, полученному из опыта, можно лишь приближенно оценить функцию отклика. Значение этой функции в фиксированной точке $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$ факторного пространства равно условному математическому ожиданию наблюдаемой переменной y в этой точке, т. е.

$$\psi(\vec{X}^*) = M\{y(\vec{X}^*)\}, \quad (9.3)$$

так как по предположению $M\{\varepsilon(\vec{X})\} = 0$.

В статистике функция, связывающая условное математическое ожидание случайной переменной y с контролируруемыми переменными \vec{X} , называется *регрессией*.

Если вид функции отклика $\psi(\vec{X})$ неизвестен, то ее можно разложить в ряд Тейлора, т. е. представить в виде полинома:

$$\psi(\vec{X}) = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_j + \sum_{j < l} \beta_{jl} x_j x_l + \sum_{j=1}^k \beta_{jj} x_j^2 + \dots, \quad (9.4)$$

где $\beta_0, \beta_j, \beta_{jl}, \beta_{jj}$ – неизвестные коэффициенты регрессии.

Функция отклика $\psi(\vec{X})$ считается полностью известной, если определены все коэффициенты β , входящие в формулу (9.4).

Вследствие влияния на результаты эксперимента случайных факторов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\gamma$ истинные значения коэффициентов регрессии (9.4) могут быть оценены лишь приблизительно, т. е. может быть построена лишь

приближенная функция $\Phi(\vec{X}) \approx \psi(\vec{X})$, которую определяют по результатам проведения эксперимента и записывают в виде степенного полинома первого, второго, реже – третьего порядков:

$$\hat{y} = \Phi(\vec{X}) = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j x_j + \sum_{j < l} b_{jl} x_j x_l + \sum_{j=1}^k b_{jj} x_j^2 + \dots, \quad (9.5)$$

где b_0, b_j, b_{jl}, b_{jj} – статистические оценки коэффициентов β , полученные с помощью метода наименьших квадратов. Этот метод дает эффективные оценки коэффициентов регрессии в случае, если ошибка опыта $\varepsilon(\vec{X})$, а следовательно, и сама переменная y имеют нормальное распределение.

Дисперсия наблюдаемой переменной y равна дисперсии ошибки опыта, т. е. $D_y = \sigma_y^2 = \sigma^2\{\varepsilon\}$; D_y называют *дисперсией воспроизводимости* эксперимента. Она характеризует качество эксперимента (при $D_y = 0$ эксперимент называют идеальным). При проведении опытов необходимо обеспечить равные значения дисперсий реализаций выходного параметра $D\{y_i\}$.

Пусть для оценки функции отклика предполагается провести n измерений выходного параметра y . Набор n координат точек в факторном пространстве $(x_{11}, \dots, x_{1k}), \dots, (x_{n1}, \dots, x_{nk})$, в которых будут проведены измерения (опыты) на множестве допустимых значений G , называется *планом эксперимента*.

Факторный эксперимент – это план, в соответствии с которым все уровни каждого фактора встречаются в сочетании со всеми уровнями остальных факторов. Уровни определяют количественные значения факторов. Если количество уровней для каждого фактора одинаково и равно L , то общее количество комбинаций уровней – L^k .

Минимальное количество уровней $L_{\min} = 2$ – нижнее и верхнее предельные значения фактора. В этом случае можно определить только линейные эффекты (т. е. построить линейные регрессионные модели). Для учета квадратичных эффектов необходимо использовать три уровня, для кубических – четыре и т. д.

В результате проведения эксперимента факторы могут отсеиваться, т. е. из всего множества \vec{X} устанавливаются те факторы, которые существенно влияют на отклики модели.

Важным этапом планирования эксперимента является выбор интервалов варьирования факторов Δx_j . С одной стороны, интервал варьирования не должен быть настолько мал, чтобы уровни факторов были неразличимы на фоне случайных воздействий $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\gamma$, а с другой –

не должен быть настолько велик, чтобы нижний и верхний уровни располагались по разные стороны экстремума (в этом случае точность предсказания направления градиента может оказаться очень низкой) или выходили за пределы допустимой области G .

Область проведения эксперимента устанавливают на основе априорной информации об исследуемой системе. Таким же образом выбирают и подобласть, в которой проводят первую серию опытов.

Начальные серии опытов планируют так, чтобы можно было оценить лишь линейные коэффициенты регрессии, характеризующие направление градиента функции отклика. Поэтому на начальных этапах используют простейшую математическую модель эксперимента – линейную (полином первого порядка).

Линейная модель, используемая для аппроксимации соответствующего участка поверхности отклика, считается адекватной, если проводимая на ее основе оценка градиентного направления статистически удовлетворяет заданной точности.

В выражение (9.5) можно ввести новые обозначения переменных $x_0 \equiv 1$, $x_j = x_j$, $j = 1 \dots k$, $x_1 x_2 = x_{k+1}$, ... и свести модель поверхности отклика к виду линейной по параметрам модели:

$$y = \sum_{j=0}^{M-1} b_j x_j, \quad (9.6)$$

где x_0 – «фиктивная» переменная; M – полное количество переменных и коэффициентов модели. Например, регрессионную модель зависимости выходного параметра от трех независимых входных факторов $y = \Phi(x_1, x_2, x_3)$ можно записать в виде полинома первого порядка:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_1 x_2 + b_5 x_2 x_3 + b_6 x_1 x_3 + b_7 x_1 x_2 x_3 = \sum_{j=0}^7 b_j x_j,$$

где $x_0 = 1$, $x_4 = x_1 x_2$, $x_5 = x_2 x_3$, $x_6 = x_1 x_3$, $x_7 = x_1 x_2 x_3$.

9.2. Схема полного факторного эксперимента

Полный факторный эксперимент (ПФЭ) позволяет количественно оценить все линейные эффекты факторов $\vec{X} = \{x_j\}$, $j = 1 \dots k$ и эффекты взаимодействия факторов. Взаимодействие факторов возникает в том случае, если эффект одного фактора зависит от уровня, на котором находится другой фактор. Факторы варьируют на двух уровнях (рис. 9.1); каждый из k факторов x_j может

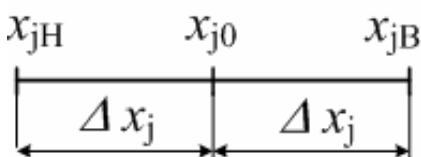


Рис. 9.1. Уровни варьирования фактора

быть установлен либо на верхнем (x_{jB}), либо

на нижнем уровне (x_{jH}), которые расположены симметрично относительно некоторого нулевого уровня (x_{j0}). В этом случае количество точек, в которых проводят опыты, равно 2^k .

Нулевые уровни каждого фактора представляют собой точку в допустимой области G , называемую *центром плана*.

Для значений факторов принято использовать такой код:

$$x_{jB} = +1 \text{ (или «+»), } x_{jH} = -1 \text{ (или «-»)}.$$

Переход к кодовым (нормированным) значениям факторов выполняют по формулам

$$x'_j = \frac{x_j - x_{j0}}{\Delta x_j}, \quad x_{j0} = \frac{x_{jB} + x_{jH}}{2}, \quad \Delta x_j = \frac{x_{jB} - x_{jH}}{2}. \quad (9.7)$$

План ПФЭ оформляют в виде матрицы эксперимента X , столбцы которой содержат значения варьируемых факторов, а строки – условия проведения опытов. Матрица ПФЭ является квадратной, размером $K \times M$, $K = M = 2^k$, где k – количество независимых факторов; M – полное количество переменных и коэффициентов линейной модели; K – количество опытов, необходимых для оценки коэффициентов модели.

Матрицу X формируют по определенным правилам:

- столбец «фиктивной» переменной x_0 заполняют значением 1 (записывают только знак «+», единица условно опускается);
- столбцы независимых факторов x_1, x_2, \dots, x_k заполняют значениями ± 1 (записывают только знак «+» или «-»);
- варьирование независимыми переменными в столбцах x_1, x_2, \dots, x_k необходимо осуществлять с разной частотой: частота смены знака в каждом последующем столбце независимых факторов снижается в два раза (x_1 – максимальная частота смены знака, x_2 – частота снижена в два раза по сравнению с x_1 , x_3 – частота варьирования снижена в два раза по сравнению с x_2 и т.д.);
- столбцы произведений факторов ($x_j x_l, x_j x_l x_r$ и т. д.) получают почленным перемножением столбцов соответствующих факторов.

Матрица X , построенная таким образом, обладает свойствами:

- симметричности

$$\sum_{i=1}^K x_{ij} = 0;$$

- нормированности

$$\sum_{i=1}^K x_{ij}^2 = K;$$

– ортогональности

$$\sum_{i=1}^K x_{ij}x_{il} = 0 \text{ при } j \neq l;$$

– ротатабельности: дисперсия ошибки оценки значений функции отклика $\Phi(\vec{X})$ не зависит от направления градиента функции $\text{grad } \psi(\vec{X})$.

В табл. 9.1 приведена матрица для расчета коэффициентов регрессии ПФЭ типа 2^2 с учетом взаимодействий факторов.

Таблица 9.1

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+	–	–	+	y_1
2	+	+	–	–	y_2
3	+	–	+	–	y_3
4	+	+	+	+	y_4

Для устранения систематической погрешности эксперимента порядок проведения опытов рандомизируют с помощью датчика случайных чисел: каждой строчке плана присваивают случайный порядковый номер от 1 до K (повторяющиеся числа игнорируют).

ПФЭ проводят в соответствии с порядком после рандомизации, выставляя значения независимых факторов x_1, x_2, \dots, x_k равными x_{jB} или x_{jH} согласно коду строки. По каждой строке плана измеряют значения выходного параметра; данные измерений заносят в столбец y . Если в каждой точке плана проводился не один, а серия опытов, то в матрицу ПФЭ вместо значения y_i следует подставлять среднее значение \bar{y}_i .

9.3. Обработка данных эксперимента

Статистический анализ результатов эксперимента начинают с проверки гипотезы о воспроизводимости эксперимента.

Воспроизводимостью эксперимента называют свойство повторяемости его данных в серии повторных экспериментов. Поскольку эти данные случайны, то можно говорить лишь о повторяемости некоторых характеристик результатов опытов. Такой характеристикой является построчная дисперсия $D\{y_i\}$, которая не должна существенно изменяться по строкам эксперимента. Неоднородность дисперсии воспроизводимости ведет к большим ошибкам вычисления коэффициентов регрессионной модели.

Оценку однородности дисперсии воспроизводимости выполняют по результатам серии параллельных (проводимых в одной и той же точке плана) опытов.

Определяют построчные математические ожидания и дисперсии:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{r} \cdot \sum_{l=1}^r y_{il};$$

$$D\{y_i\} = \frac{1}{r-1} \cdot \sum_{l=1}^r (y_{il} - \bar{y}_i)^2,$$

где r – количество параллельных опытов; $i = 1 \dots K$ – номер строки матрицы эксперимента X .

Гипотезу о воспроизводимости эксперимента проверяют, используя критерий Кохрена. Для этого рассчитывают величину

$$G = \frac{D\{y\}_{\max}}{\sum_{i=1}^K D\{y_i\}}, \quad (9.8)$$

где $D\{y\}_{\max}$ – максимальная из построчных дисперсий; K – количество строк в матрице эксперимента X .

Значение G сравнивают с квантилем распределения Кохрена $G_{\text{табл}}(\alpha, K, f_1)$ (табл. 9.2), где α – уровень значимости (вероятность ошибки первого рода); $f_1 = r - 1$ – число степеней свободы.

Таблица 9.2

Квантили распределения Кохрена при $\alpha = 0,05$							
$K \backslash f_1$	3	4	5	6	7	8	9
4	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175	0,5070
8	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3043	0,2926

Если $G > G_{\text{табл}}$, то эксперимент невоспроизводим. В этом случае необходимо либо увеличить количество параллельных опытов, либо подобрать некоторое нелинейное преобразование выходного параметра например, \sqrt{y} , $\log_a(y)$, $\exp(y)$, y^a и т. п.

Если эксперимент воспроизводим, то рассчитывают значение дисперсии воспроизводимости

$$D_y = \frac{1}{K} \cdot \sum_{i=1}^K D\{y_i\} \quad (9.9)$$

и переходят к основной обработке данных, которая состоит в нахождении оценок коэффициентов модели (9.6) и проверке их значимости.

При обработке данных по методу наименьших квадратов ортогональность матрицы ПФЭ позволяет получить независимые оценки коэффициентов уравнения регрессии для неполного полинома (т. е. полинома, не имеющего членов, содержащих степени независимых переменных).

Независимость оценок означает, что оценка любого коэффициента не зависит от того, какие значения принимают оценки других коэффициентов.

Выражение для оценки коэффициентов полинома

$$b_j = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_{ij} \cdot \bar{y}_i, \quad j = 0 \dots M-1. \quad (9.10)$$

В целях исключения из уравнения регрессии факторов, слабо влияющих на выходной параметр y , и для установления факта попадания в область экстремума проверяют значимость коэффициентов регрессионного полинома (9.10).

Значимо ли отклонение от «0» того или иного коэффициента b_j , определяют по t -критерию Стьюдента

$$t_j = |b_j| \cdot \sqrt{\frac{K \cdot r}{D_y}}. \quad (9.11)$$

Полученное значение t_j сравнивают с квантилем распределения Стьюдента $t_{\text{табл}}(\alpha, f_2)$, где α – уровень значимости статистической гипотезы; $f_2 = K(r-1)$ – число степеней свободы.

Для расчета $t_{\text{табл}}$ при заданных α (как правило, $\alpha = 0,05$) и f_2 можно использовать функцию Mathcad $qt(P, f_2)$:

$$t_{\text{табл}}(\alpha, f_2) = qt(1 - \alpha/2, f_2), \quad (9.12)$$

где $P = 1 - \alpha/2$ (для двусторонней критической области).

Если $t_j < t_{\text{табл}}$, то j -й коэффициент считают незначимым и обнуляют, т. е. $b_j = 0$. При этом следует иметь в виду такие обстоятельства:

1) причиной незначимости коэффициента b_j может быть неудачный выбор интервала варьирования Δx_j соответствующего фактора x_j ;

2) если хотя бы один из коэффициентов при членах взаимодействия $b_{k+1} \dots b_{M-1}$ значимо отличается от нуля, то это свидетельствует о неадекватности линейной модели и о необходимости ее проверки и модификации для обеспечения адекватности;

3) если все коэффициенты при линейных членах $b_1 \dots b_k$ значимы, а коэффициенты при членах взаимодействиях $b_{k+1} \dots b_{M-1}$ – нет, то можно переходить к следующему этапу экстремального эксперимента – движению по направлению градиента (крутому восхождению). Если коэффициенты незначимы и при линейных членах, то следует провести эксперимент с измененными (увеличенными или уменьшенными) интервалами варьирования факторов. Если и после этого коэффициенты будут незначимы, эксперимент прекращают, поскольку достигнута область экстремума;

4) если при адекватной линейной модели только часть линейных коэффициентов значимо отличается от нуля, то следует повторить весь

эксперимент при расширенных интервалах варьирования для тех факторов, при которых коэффициенты незначимы. Если и после этого те же коэффициенты оказались незначимыми, то соответствующие факторы можно исключить из дальнейших исследований;

5) при неадекватной линейной модели следует заново провести весь эксперимент. При этом желательно центр эксперимента перенести в точку с лучшим из полученных значений параметра оптимизации, а интервалы варьирования уменьшить в обратной пропорции относительно соответствующих коэффициентов регрессии;

6) при неадекватной модели иногда целесообразно начать движение по направлению градиента; это может привести к успеху быстрее, чем повторение экспериментов в прежних условиях.

Найденные значения значимых коэффициентов b_j подставляют в модель (9.6) и рассчитывают предсказанные моделью величины выходного параметра $\hat{y}_i = \sum_{j=0}^{M-1} b_j x_{ij}$ для каждой строки плана эксперимента X .

9.4. Проверка адекватности уравнения регрессии

Проверка адекватности уравнения регрессии основана на сопоставлении рассеяния значений y_{il} , полученных в результате моделирования, относительно линии регрессии $\hat{y}_i = \Phi(\bar{X}^{(i)})$ с рассеянием значений y_{il} относительно своих математических ожиданий \bar{y}_i .

Если количество значимых коэффициентов модели d меньше полного количества коэффициентов M , то для определения рассеяния y относительно линии регрессии вычисляют дисперсию адекватности:

$$D_A = \frac{1}{M-d} \sum_{i=1}^K (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2. \quad (9.13)$$

Адекватность проверяют сравнением дисперсий адекватности и воспроизводимости по критерию Фишера:

$$F = D_A / D_y. \quad (9.14)$$

Если $F < 1$, то модель считают адекватной. Иначе сравнивают F с квантилем распределения Фишера $F_{\text{табл}}(\alpha, f_3, f_2)$, где α – уровень значимости статистической гипотезы; $f_3 = M - d$ и $f_2 = K(r - 1)$ – степени свободы.

Для расчета квантиля $F_{\text{табл}}$ при заданном уровне значимости α (обычно $\alpha = 0,05$) и известных степенях свободы f_3 , f_2 можно использовать функцию Mathcad $qF(P, f_3, f_2)$, где $P = 1 - \alpha$, возвращающую значения обратной интегральной функции распределения Фишера:

$$F_{\text{табл}}(\alpha, f_3, f_2) = qF(1 - \alpha, f_3, f_2). \quad (9.15)$$

Если $F < F_{\text{табл}}$, то гипотеза об адекватности принимается.

Если количество значимых коэффициентов равно их полному количеству, то вычисляют относительные ошибки выходного параметра

$$\delta_i = \frac{|\bar{y}_i - \hat{y}_i|}{\bar{y}_i} \cdot 100\%, \quad (9.16)$$

выбирают максимальную величину δ_i , которую сравнивают с допустимым значением относительной ошибки $\delta_{\text{доп}}$. Если $\max\{\delta_i\} < \delta_{\text{доп}}$, то модель считают адекватной.

9.5. Поиск экстремальных значений на поверхности отклика

О достижении области экстремума G^* свидетельствуют малые значения всех коэффициентов линейной регрессии. Если экстремум лежит на границе допустимой области G , то значения коэффициентов регрессии могут быть любыми, однако в этом случае сам факт выхода на границу области G свидетельствует о достижении экстремума.

Эксперимент оканчивают при достижении области G^* , так как в этом случае экстремальные условия найдены с требуемой точностью.

Рассмотрим этап крутого восхождения, т. е. движение по направлению градиента.

Градиентом функции отклика $\psi(x_1, x_2, \dots, x_k)$ в заданной точке $\bar{X}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$ называется вектор, характеризующий направление максимального роста этой функции:

$$\mathit{grad} \psi(\bar{X}^0) = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right\} \Big|_{x_j = x_j^0}. \quad (9.17)$$

Таким образом, для того чтобы кратчайшим путем достичь области экстремума (вершины поверхности отклика), следует двигаться по направлению градиента.

Оценкой градиента является вектор линейных членов регрессии

$$\mathit{grad}^* \psi(\bar{X}^0) = (b_1, b_2, \dots, b_k). \quad (9.18)$$

Пошаговое движение по градиенту осуществляется таким образом. Выбирают шаг h . Затем к координатам нулевой точки \bar{X}^0 (центр эксперимента) добавляют значение шага h , измененное пропорционально соответствующим коэффициентам регрессии. В результате этого получают координаты новой точки \bar{X}^1 факторного пространства, расположенной в направлении градиента функции отклика.

При переходе от кодированного факторного пространства к натуральному градиент меняет направление на противоположное, поэтому движение по градиенту следует осуществлять только в натуральном факторном пространстве. Переход от кодовых (нормированных) значений факторов $x'_j \in [-1, 1]$ к их фактическим значениям выполняется по (9.7).

Единых правил для выбора шага h не существует. Целесообразно задать такой шаг, чтобы первая точка крутого восхождения располагалась вне области эксперимента. Однако сделанный шаг не должен выводить точку за пределы области определения факторов. Обычно шаг подбирают для фактора, коэффициент при котором наибольший по абсолютной величине. Пусть таковым является фактор x_μ и для него выбран шаг h_μ . Шаги по остальным факторам рассчитывают так, чтобы полученная точка располагалась в направлении градиента, а фактор x_μ изменился на величину h_μ . Пропорциональный пересчет шага для j -го фактора выполняют по формуле

$$h_j = \frac{b_j \Delta x_j}{b_\mu \Delta x_\mu} h_\mu, \quad (9.19)$$

после чего определяют координаты новой точки

$$\bar{X}^1 = (x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \dots, x_k^0 + h_k). \quad (9.20)$$

Обязательная реализация плана эксперимента на каждом шаге крутого восхождения не требуется. Целесообразно переходить от шага к шагу, если значение критерия оптимизации (выходного параметра y), рассчитываемое как средний результат серий опытов, в каждой новой точке больше, чем в предыдущей. Если на очередном шаге критерий оптимизации не изменился или уменьшился, целесообразно предыдущую точку принять за центр нового плана с тем, чтобы уточнить уравнение регрессии в данной точке, и, возможно, определить новое направление градиента. Если улучшить ранее полученный результат и после этого не удастся, можно прекратить эксперимент (поскольку область экстремума достигнута) или перейти к планам более высокого порядка, позволяющим учесть дополнительные нелинейные (например, квадратичные) члены регрессии и, следовательно, более точно описать поверхность отклика в области экстремума.

Если стоит задача минимизации критерия, то движение к области экстремума происходит в направлении наискорейшего спуска – по антиградиенту функции отклика, т. е. $-\text{grad}(\psi(\bar{X}))$.

В области экстремума функции отклика проводят канонический анализ, чтобы выяснить, является ли найденная точка точкой максимума (глобального или локального) или это – седловая точка.

Контрольные вопросы

1. Что является целью экспериментов с имитационными моделями?
2. Чем активный эксперимент отличается от пассивного?
3. В чем состоит основная задача оптимального эксперимента?
4. Что собой представляет регрессионная модель?
5. Что называют планом эксперимента?
6. Что такое рандомизация опытов и для чего ее выполняют?
7. Чем определяется выбор уровней варьирования и интервалов варьирования факторов?
8. В чем заключается полный факторный эксперимент? Какую модель он позволяет получить?
9. Как перейти от фактического значения параметра к нормированному и для чего выполняют нормировку?
10. Как построить план-матрицу эксперимента? Какими свойствами эта матрица обладает?
11. Что такое воспроизводимость эксперимента? Каким образом можно проверить воспроизводимость и что следует предпринять, если эксперимент невоспроизводим?
12. Что означает значимость коэффициента регрессионной модели и как ее оценить?
13. В чем состоит сущность понятия "адекватность модели"?
14. Как проверить, является ли построенная модель адекватной?
15. Каким образом с помощью факторного эксперимента можно найти точку минимума (максимума) выходного параметра?
16. Как определить, достигнута ли область экстремума критерия оптимизации?
17. По результатам ПФЭ, приведенным в табл. 9.3:
 - а) проверьте, является ли эксперимент воспроизводимым; если нет – выполните нелинейное преобразование данных для обеспечения однородности дисперсии воспроизводимости, если да – рассчитайте дисперсию воспроизводимости;
 - б) найдите оценки коэффициентов регрессионной модели и проверьте их значимость;
 - в) определите, является ли полученная модель адекватной.

Таблица 9.3

Номер опыта	Значения факторов				Выходной параметр y_v			
	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y_1	y_2	y_3	y_4
1	+	-	-	+	1,1	1,2	1	1,5
2	+	+	-	-	0,5	0,3	0,6	0,2
3	+	-	+	-	2,6	3	2,8	3,2
4	+	+	+	+	1,6	1,8	2,4	2,2

Приложение

МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ВОДЫ В ВОДОХРАНИЛИЩЕ

Пусть для различных хозяйственных нужд требуется определенный запас пресной воды. Управлять этим запасом необходимо так, чтобы наилучшим образом удовлетворять возникающие потребности в пресной воде. Чтобы правильно выбрать стратегию управления, нужно знать величину $X_i = X(t_i)$ – запас воды в водохранилище в момент времени t_i и его изменение с течением времени.

Для упрощения задачи будем считать, что водохранилище расположено в климатической зоне с положительными средними зимними температурами, и процессы формирования снежного покрова и снеготаяния можно не учитывать.

Природные факторы, которые влияют на величину X_i :

- приток по реке, на которой построено водохранилище $PR(t)$;
- пополнение запаса воды за счет боковой приточности $B(t)$, в том числе притока почвенных и грунтовых вод;
- выпадение атмосферных осадков на поверхности водохранилища $O(t)$;
- испарение воды с поверхности водохранилища $RU(t)$;
- фильтрация воды в нижнем створе водохранилища $R\Phi(t)$.

Из множества факторов антропогенного происхождения будем учитывать два:

- расходы воды на нужды сельского хозяйства $Zcx(t)$ и коммунального водоснабжения $Zkb(t)$;
- сброс воды через плотину дальше по реке $R\Pi(t)$.

Схематически динамика запаса воды в водохранилище показана на рис. П.1.

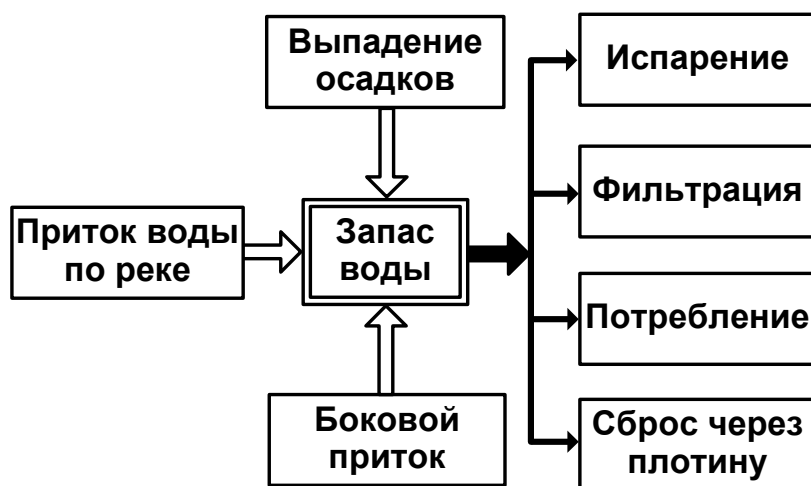


Рис. П.1. Факторы, определяющие запас воды в водохранилище

Запас воды не должен становиться меньше некоторой минимальной величины X_{\min} , а также не должен превышать объем водохранилища $X_{\max} \leq V$. Кроме того, будем считать, что распределение воды между потребителями осуществляется пропорционально их запросам.

Следующий вопрос касается величин факторов и их изменений во времени. Процессы формирования речного стока, боковой приточности и осадков носят случайный характер. Для их исследования применяют статистические методы. Пусть известны ряды наблюдений среднедекадных величин стока, осадков в районе водохранилища и бокового притока за предыдущие годы. Тогда по данным наблюдений можно построить статистические модели факторов $PR(t), O(t), B(t)$ (см. разд. 5), а затем генерировать случайные числа с соответствующими законами распределения (см. подразд. 7.1).

Перейдем к процессам расходования воды. Испарение воды с поверхности водохранилища не измеряется и динамику его изменения статистическими методами определить нельзя. Однако известно, что $RU(t)$ зависит от ряда факторов, наиболее существенные из которых – дефицит влажности воздуха и площадь зеркала водохранилища. Таким образом, будем считать, что

$$RU(t) = \alpha D(t), \quad (\text{П.1})$$

где $D(t)$ – относительный коэффициент дефицита влажности воздуха, $D(t) \in [0, 1]$; α – эмпирический коэффициент пропорциональности.

Величина объема воды, профильтровавшейся в нижнем створе водохранилища в момент времени t_i пропорциональна объему воды в водохранилище $X(t_i)$ и зависит от типа подстилающих грунтов:

$$R\Phi(t_i) = kX(t_i), \quad (\text{П.2})$$

где k – коэффициент, соответствующий определенному типу грунта.

Расход воды через плотину $R\Pi(t)$ зависит от запаса воды в водохранилище и должен удовлетворять таким условиям:

$$R\Pi(t_i) = \begin{cases} 0, & X(t_i) \leq V; \\ X(t_i) - V, & X(t_i) > V. \end{cases} \quad (\text{П.3})$$

Величины потребления $Z_{cx}(t)$ и $Z_{kb}(t)$ также являются управляемыми величинами и формируются в зависимости от объема воды в водохранилище $X(t_i)$ и запросов на воду со стороны потребителей.

Запас воды в каждый момент времени увеличивается на значение «притока» и уменьшается на величину «расхода»:

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \Pi(t) - P(t), \quad (\text{П.4})$$

где $\Pi(t) = PR(t) + O(t) + B(t)$, $P(t) = RU(t) + R\Phi(t) + R\Pi(t) + Z\Sigma(t)$, $Z\Sigma(t) = Z_{cx}(t) + Z_{kb}(t)$.

Уравнение водного баланса (П.4) описывает зависимость запаса воды в водохранилище от природных условий и стратегии распределения этого запаса между потребителями. Задавая условия пополнения и расходования запаса воды и решая (П.4), можно оценить запас воды в каждый момент времени t_i .

Для анализа большого количества вариантов «притока» и «расхода» воды в течение большого промежутка времени необходима программа, позволяющая проводить вычисления на ЭВМ. Эта программа и будет представлять собой имитационную модель водохранилища.

Схема алгоритма моделирования:

- генерирование случайных значений внешних факторов;
- вычисление объема воды, испарившейся и профильтровавшейся из водохранилища;
- расчет запаса воды без учета промышленно-потребительских факторов использования воды;
- оценка количества воды, потребляемой сельским хозяйством и коммунальным водоснабжением;
- коррекция количества воды в водохранилище с учетом антропогенного фактора.

Ниже приведен текст программы моделирования в Mathcad с комментариями и пояснениями, где это необходимо.

Принятые обозначения: V – объем водохранилища, км³; X_{\min} и X_{\max} – минимальный и максимальный объем; S – площадь водной поверхности, км²; N – количество отсчетов по времени.

Исходные данные:

$$\begin{array}{llll} V := 3 & S := 400 & X_{\min} := V \cdot \frac{2}{3} & X_{\max} := V \\ N := 365 & i := 0..N - 1 & & \end{array}$$

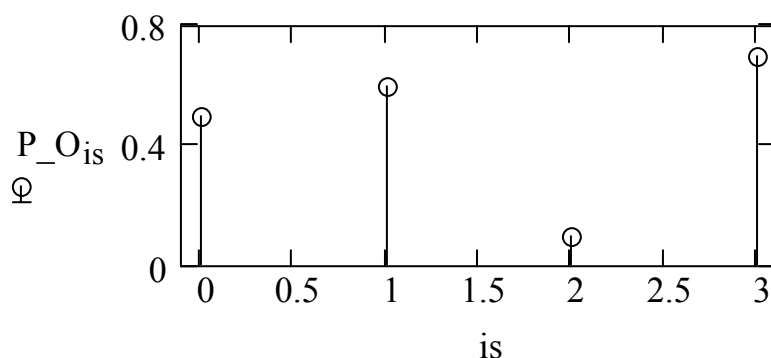
Моделирование осадков

Количество осадков – случайная величина, которая определяется вероятностью выпадения осадков P_O , их интенсивностью $rate1$ (мм/ч) и продолжительностью $time_O$ (ч).

Считаем, что $rate1$ – нормальная величина с математическим ожиданием M_O и СКО σ_O ; $time_O$ – равномерная величина на интервале от 0,1 до 3. Параметры распределения осадков зависят от сезона:

$$P_O := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 0.1 \\ 0.7 \end{pmatrix} \quad M_O := \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 30 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \sigma_O := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

График условных распределений вероятности осадков по сезонам
 $is := 0..3$



Плотность нормального распределения (см. (4.8))

$$fN(z, m, \sigma) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z-m}{\sigma}\right)^2}$$

Для случайной величины «интенсивность осадков» построим графики $fN(\bullet)$ в зависимости от сезона: OWn – зимой, OSp – весной, OSm – летом, OAu – осенью; NG – число точек для построения графиков:

$$NG := 300$$

$$io := 0..NG - 1$$

$$XMAX := M_{O2} + 3 \cdot \sigma_{O2}$$

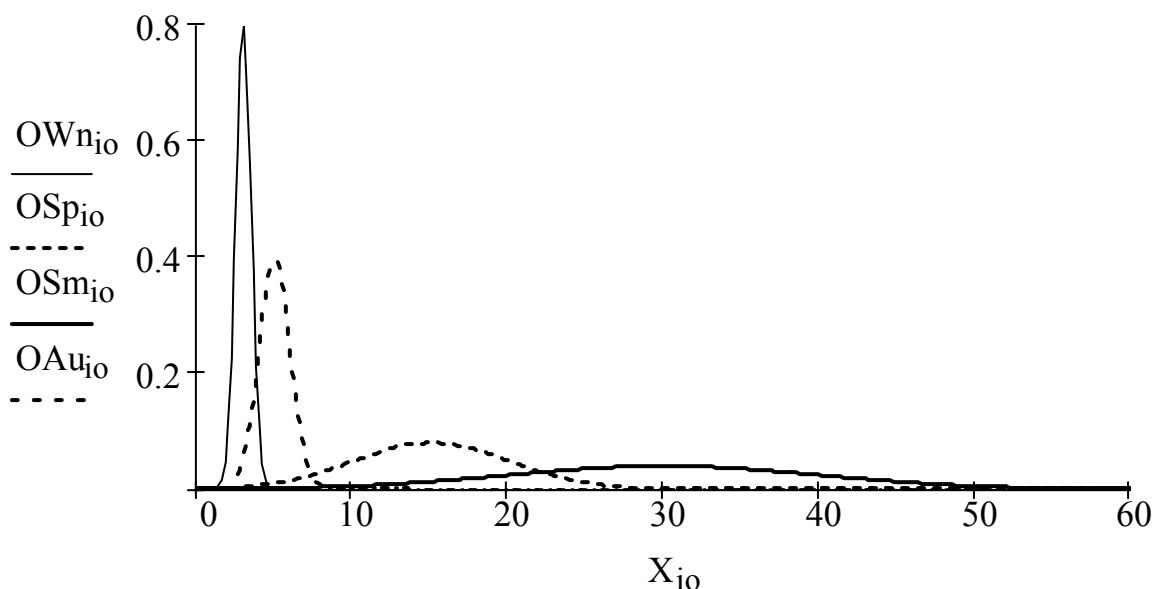
$$X_{io} := \frac{XMAX}{NG - 1} \cdot io$$

$$OWn_{io} := fN(X_{io}, M_{O0}, \sigma_{O0})$$

$$OSp_{io} := fN(X_{io}, M_{O1}, \sigma_{O1})$$

$$OSm_{io} := fN(X_{io}, M_{O2}, \sigma_{O2})$$

$$OAu_{io} := fN(X_{io}, M_{O3}, \sigma_{O3})$$



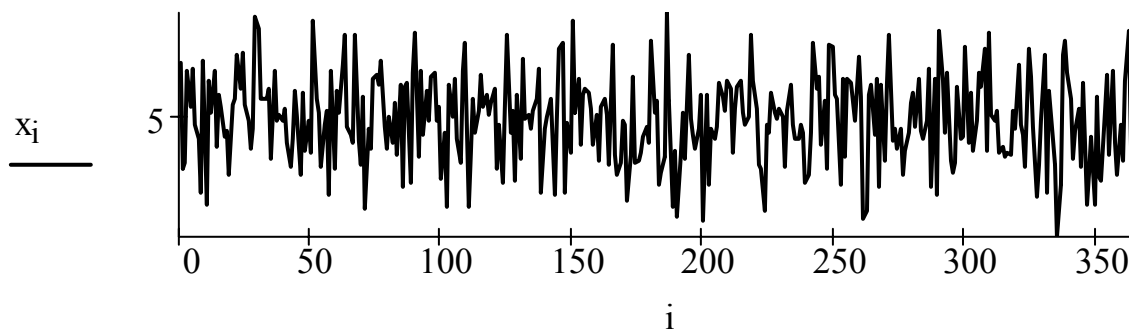
Определим функцию-генератор нормально распределенной величины с параметрами m и σ (см. (7.7)):

$$\text{Norm}(m, \sigma) := m + \frac{\sigma}{2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{48} \text{rnd}(1) - 24 \right)$$

Оценим качество работы генератора по критерию χ^2 .

Для этого выполним моделирование нормальной величины:

$$x_i := \text{Norm}(M_{O_3}, \sigma_{O_3})$$



Построим гистограмму распределения случайной величины x .

Обозначим M – количество интервалов, h_x – ширина:

$$M := 10 \quad \min x := \min(x) \quad \max x := \max(x) \quad h_x := \frac{\max x - \min x}{M - 1}$$

Массив координат интервалов гистограммы

$$r := 0..M \quad dx_r := h_x \cdot r + \min x$$

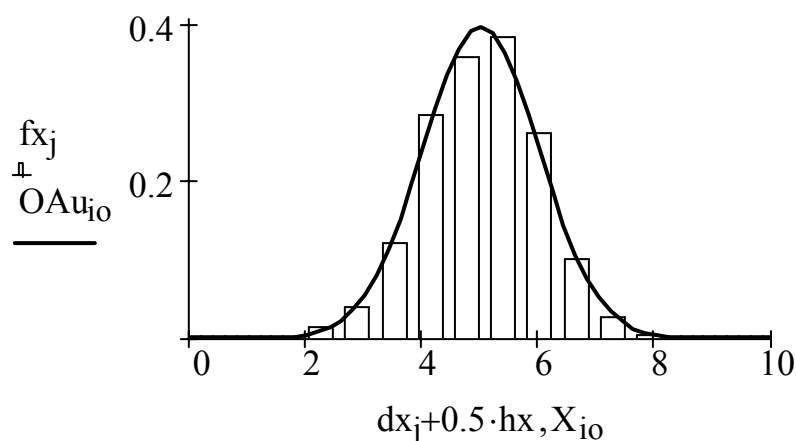
Количество попаданий значений случайной величины x в интервалы гистограммы

$$gx := \text{hist}(dx, x)$$

Оценка плотности распределения вероятности (см. (5.6))

$$j := 0..M - 1 \quad fx_j := \frac{gx_j}{N \cdot h_x}$$

Совместим на одном графике гистограмму (массив fx) и теоретическую плотность распределения вероятностей (массив OAu_{i0}):



Теоретическая вероятность попадания величины x_i в j -й интервал гистограммы

$$P_j := \int_{dx_j}^{dx_{j+1}} fN(z, M_{O_3}, \sigma_{O_3}) dz$$

Значение критерия χ^2 (см. (5.12))

$$\chi^2 := \sum_j \left[\frac{(N \cdot P_j - g_{x_j})^2}{N \cdot P_j} \right] \quad \chi^2 = 2.325$$

Число степеней свободы (см. (5.13))

$$\tau := M - 1 - 2 \quad \tau = 7$$

Найдем вероятность соответствия результатов моделирования нормальному закону распределения:

$$\alpha(\chi^2, \tau) := 1 - pchisq(\chi^2, \tau) \quad \alpha(\chi^2, \tau) = 0.94$$

Для моделирования зависимости параметров распределения осадков от сезона определим функцию $season(\bullet)$:

$$ns := \text{floor}\left(\frac{N}{12}\right) \quad season(i) := \begin{cases} \text{"Spr"} & \text{if } 2 \cdot ns < i \leq 5 \cdot ns \\ \text{"Smr"} & \text{if } 5 \cdot ns < i \leq 8 \cdot ns \\ \text{"Aun"} & \text{if } 8 \cdot ns < i \leq 11 \cdot ns \\ \text{"Win"} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Создадим функцию, устанавливающую значения параметров распределения в зависимости от сезона:

$$ParSet(Par) := \begin{cases} \text{for } i \in 0 .. N - 1 \\ \left| \begin{array}{l} P_i \leftarrow Par_0 \text{ if } season(i) = \text{"Win"} \\ P_i \leftarrow Par_1 \text{ if } season(i) = \text{"Spr"} \\ P_i \leftarrow Par_2 \text{ if } season(i) = \text{"Smr"} \\ P_i \leftarrow Par_3 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ P \end{cases}$$

$$prob_O := ParSet(P_O) \quad mR := ParSet(M_O) \quad \sigma R := ParSet(\sigma_O)$$

Генерация случайной интенсивности осадков

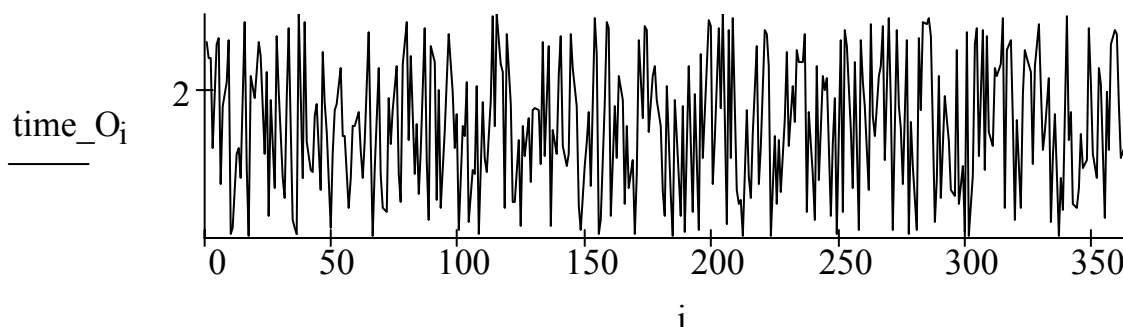
$$rate1_i := Norm(mR_i, \sigma R_i) \quad rate1_i := \text{if}(rate1_i \leq 0, 0.1, rate1_i)$$

Определим функцию-генератор величины, равновероятной на $[a, b]$:

$$Unif(a, b) := a + (b - a) \cdot \text{rnd}(1)$$

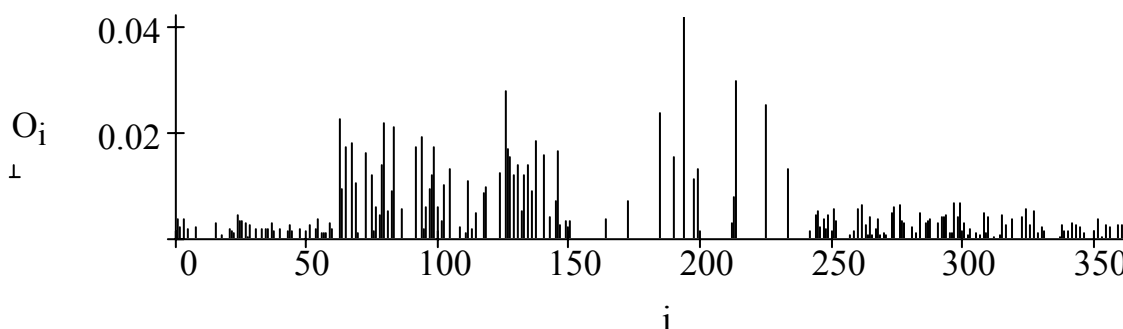
Получим массив реализаций случайной продолжительности осадков:

$$\text{time_O}_i := \text{Unif}(0.1, 3)$$



Моделируем случайное событие «осадки» (см. рис. 7.2) и, если оно происходит, генерируем значения rate_1 и time_O , которые пересчитываем в количество осадков [км³] на водное зеркало:

$$O_i := \text{if}(\text{rnd}(1) < \text{prob}_i, \text{rate}_i \cdot S \cdot \text{time_O}_i \cdot 10^{-6}, 0)$$



Моделирование бокового притока

Боковой приток моделируем как сумму двух составляющих. Первая компонента – случайный процесс, зависящий от количества осадков.

Применяем алгоритм формирования СП с заданной корреляционной функцией $R(\tau)$ (см. подразд. 7.1.9). Интервал корреляции $T = 2$ дня:

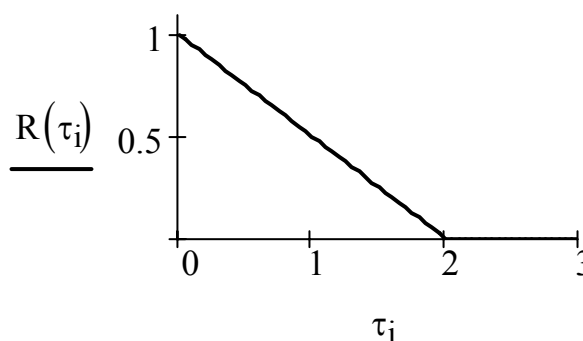
$$T := 2 \qquad R(\tau) := \text{if}\left(\tau > T, 0, 1 - \frac{1}{T} \cdot \tau\right)$$

$$\tau_{i0} := 0.05 \cdot i_0$$

$$\Delta t := \frac{365}{N}$$

$$R(\Delta t) = 0.5$$

$$R(2 \cdot \Delta t) = 0$$



Радиус корреляции составляет $2\Delta t$, поэтому $R(\tau)$ представим в виде корреляционной матрицы 2×2

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы R :

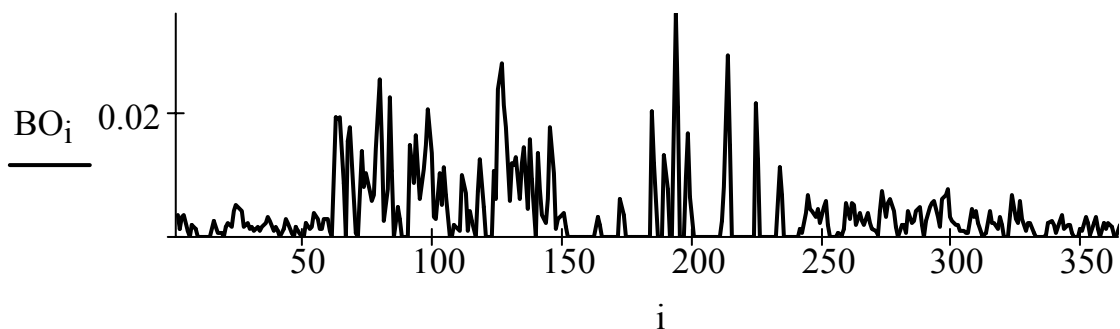
$$L := \text{eigenvals}(R) \quad V := \text{eigenvecs}(R)$$

Сформируем матрицу A преобразования (см. (7.10)) некоррелированного случайного процесса $O(t)$ в коррелированный $B(t)$:

$$\Lambda := \text{diag}(\vec{\sqrt{L}}) \quad A := V \cdot \Lambda$$

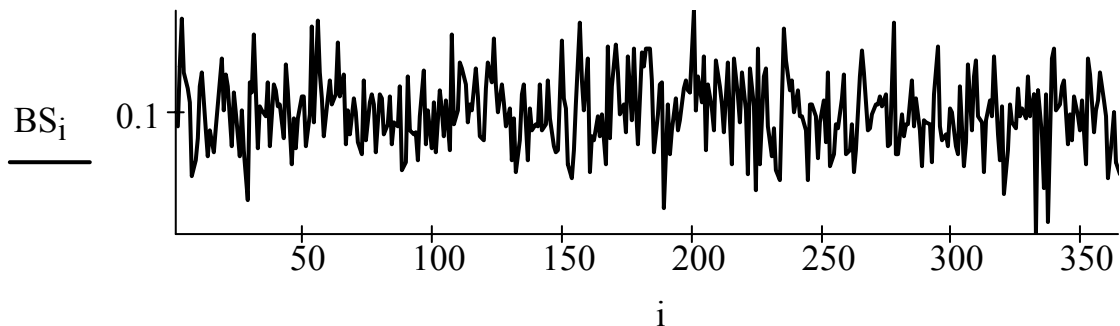
Первая составляющая бокового притока BO – коррелированный случайный процесс:

$$i := 1 .. N - 1 \quad BO_i := O_i \cdot A_{0,1} + O_{i-1} \cdot A_{0,0}$$



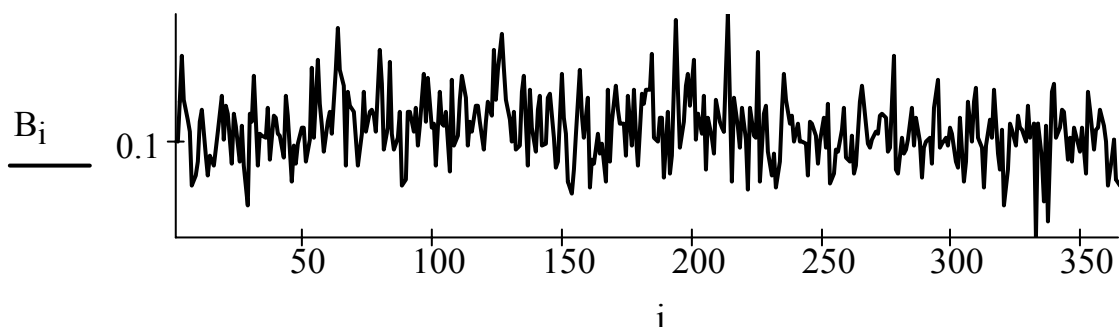
Вторая составляющая бокового притока BS – нормальный случайный процесс с параметрами $m=0,1$ и $\sigma=0,01$:

$$BS_i := \text{Norm}(0,1, 0,01) \quad BS_i := \text{if}(BS_i < 0, 0, BS_i)$$



Сформируем полный боковой приток $B(t)$ и построим график:

$$B_i := BO_i + BS_i$$



Моделирование притока по реке

Будем исходить из статистических данных по изменениям водных ресурсов в водохранилище за пять лет.

Таблицу результатов замеров речного притока, приведенных к единице времени моделирования Δt , где строка – месяц (от 1 до 12), столбец – год наблюдения (от 1 до 5), представим в виде матрицы PR

$$PR := \begin{pmatrix} 0.38 & 0.4 & 0.4 & 0.48 & 0.45 \\ 0.25 & 0.32 & 0.3 & 0.3 & 0.35 \\ 0.35 & 0.42 & 0.4 & 0.45 & 0.38 \\ 0.57 & 0.6 & 0.59 & 0.6 & 0.62 \\ 0.72 & 0.65 & 0.62 & 0.63 & 0.75 \\ 0.78 & 0.73 & 0.68 & 0.83 & 0.86 \\ 0.92 & 0.88 & 1.12 & 1.09 & 0.98 \\ 1.14 & 1.13 & 1.2 & 1.2 & 1.16 \\ 1.1 & 1.2 & 1.05 & 0.9 & 1.05 \\ 0.88 & 0.81 & 0.89 & 0.85 & 0.8 \\ 0.65 & 0.62 & 0.77 & 0.7 & 0.75 \\ 0.6 & 0.58 & 0.68 & 0.58 & 0.63 \end{pmatrix}$$

Проводить статистическую обработку данных будем отдельно по сезонам. Для этого разобьем матрицу PR на четыре подматрицы:

$$\begin{aligned} R_Wi &:= \text{submatrix}(PR, 0, 2, 0, 4) & R_Sp &:= \text{submatrix}(PR, 3, 5, 0, 4) \\ R_Sm &:= \text{submatrix}(PR, 6, 8, 0, 4) & R_Au &:= \text{submatrix}(PR, 9, 11, 0, 4) \\ ii &:= 0..4 & tt_{ii} &:= 3 \cdot ns \cdot ii \end{aligned}$$

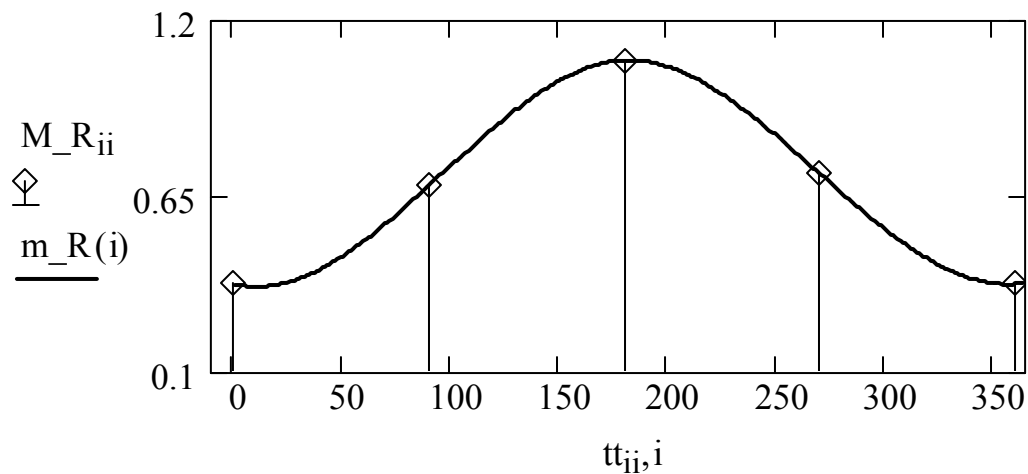
$$M_R_{ii} :=$$

mean(R_Wi)
mean(R_Sp)
mean(R_Sm)
mean(R_Au)
mean(R_Wi)

$$S_R := \begin{pmatrix} \text{Stdev}(R_Wi) \\ \text{Stdev}(R_Sp) \\ \text{Stdev}(R_Sm) \\ \text{Stdev}(R_Au) \end{pmatrix}$$

Аппроксимируем зависимость математического ожидания притока по реке M_R от времени года tt кубическим сплайном (см. (6.8)):

$$vs := cspline(tt, M_R) \quad m_R(z) := interp(vs, tt, M_R, z)$$



Ввиду малого объема статистических данных распределение величины притока по реке примем нормальным с параметрами M_R (используем результаты интерполяции сплайном) и σ_R (используем оценки СКО результатов замеров речного притока по сезонам):

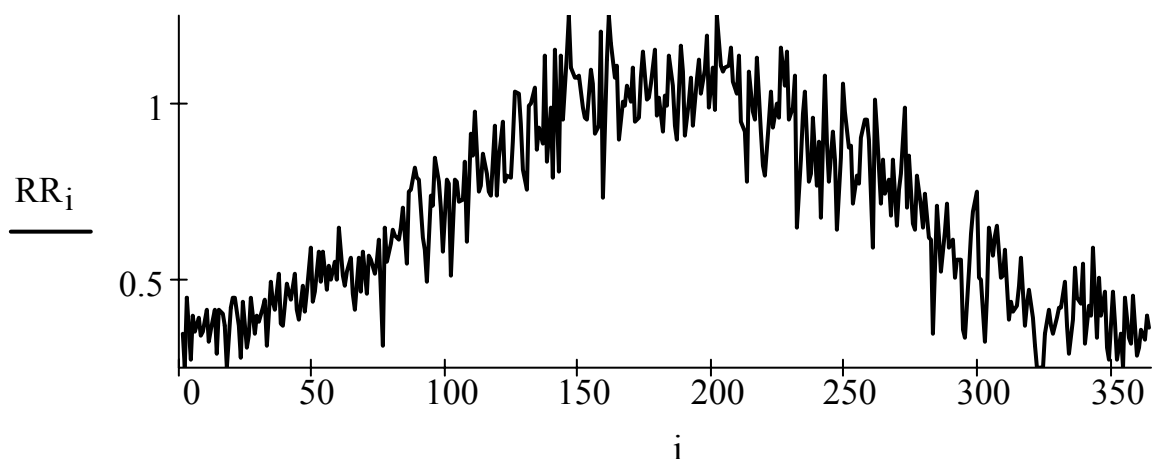
$$\sigma_R := ParSet(S_R)$$

Генерация случайного притока по реке

$$RR_i := Norm(m_R(i), \sigma_{R_i})$$

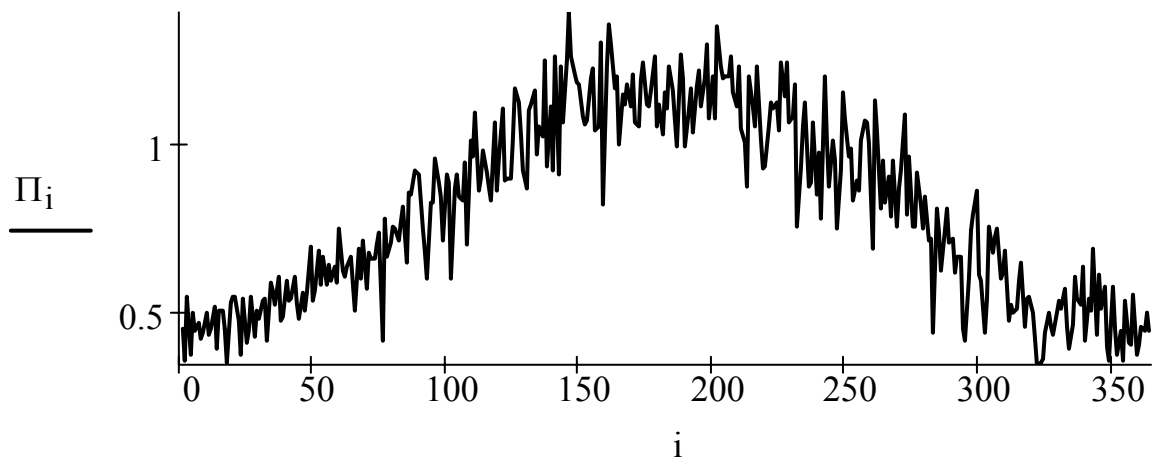
$$RR_i := \text{if}(RR_i > \text{maxR}, \text{maxR}, \text{if}(RR_i < \text{minR}, \text{minR}, RR_i))$$

Построим график результатов моделирования RR



Суммарный приток воды в водохранилище

$$\Pi_i := RR_i + B_i + O_i$$



Моделирование запросов потребителей

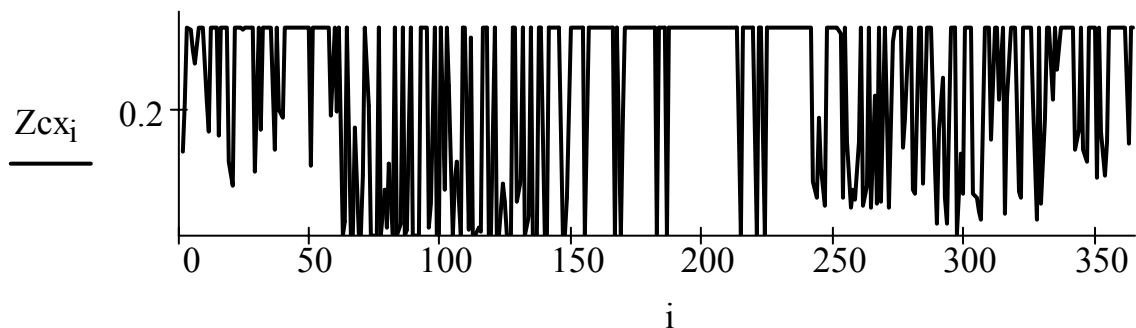
Будем считать, что потребности сельского хозяйства в воде обратно пропорциональны количеству выпавших осадков и ограничены верхним и нижним порогами потребления:

$$\min Z_{cx} := 0.05 \qquad \max Z_{cx} := 0.3$$

$$CX := \begin{cases} \text{for } i \in 0..N-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} z_i \leftarrow \frac{1}{O_i \cdot 2500} \text{ if } O_i > 0 \\ z_i \leftarrow \max Z_{cx} \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ z \end{cases}$$

Генерация случайных запросов на воду со стороны сельского хозяйства

$$Z_{cx_i} := \text{if}(CX_i < \min Z_{cx}, \min Z_{cx}, \text{if}(CX_i > \max Z_{cx}, \max Z_{cx}, CX_i))$$

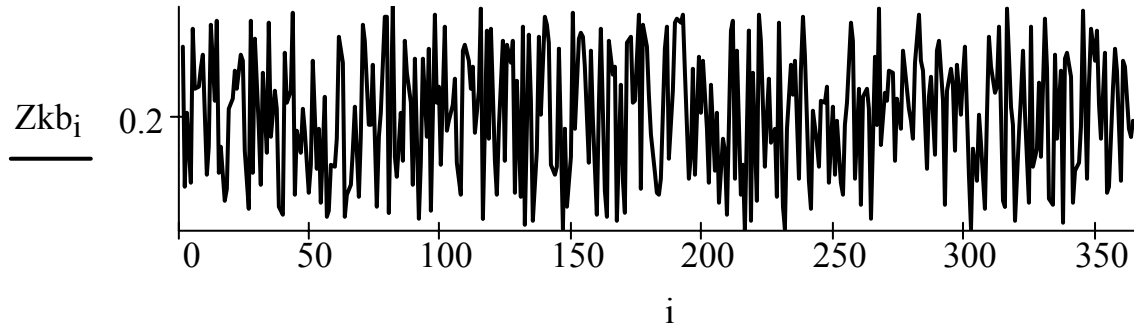


Пусть запросы на воду со стороны коммунального водоснабжения Z_{kb} – равномерная случайная величина со средним $S_{kb} = 0,2$ и отклонением от среднего ± 0.03 :

$$Skb := 0.2$$

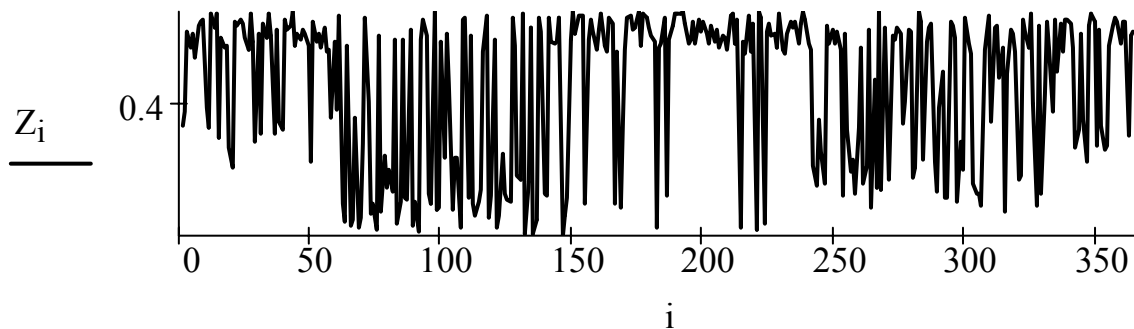
Генерация случайных чисел Zkb

$$Zkb_i := \text{Unif}(Skb - 0.03, Skb + 0.03)$$



Суммарные потребности в воде

$$Z_i := Zcx_i + Zkb_i$$



Моделирование расхода воды на потребление

Расход воды на удовлетворение запросов потребителей зависит от текущего количества воды в водохранилище, которое не может опускаться ниже порогового значения $Xmin$.

Определим функцию-генератор расхода воды с учетом суммарных потребностей в каждый момент времени Z_i и текущего объема воды в водохранилище:

$$Z\Sigma(w, i) := \text{if}[(w_i - Z_i) \leq Xmin, \text{if}(w_i > Xmin, w_i - Xmin, 0), Z_i]$$

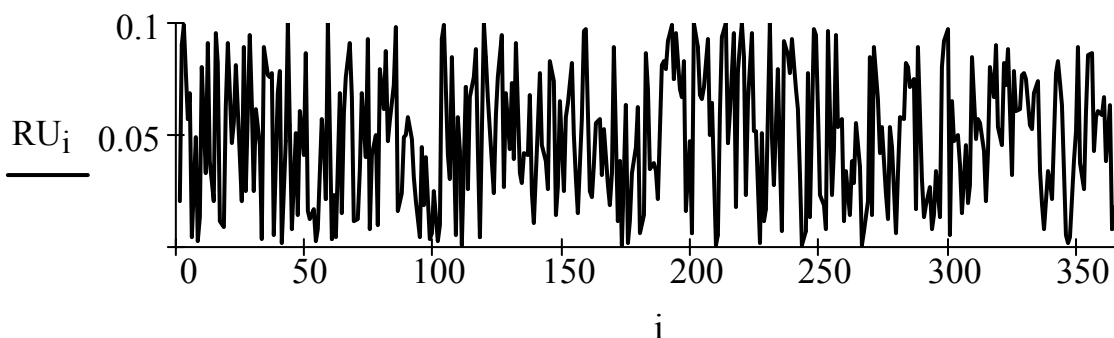
Моделирование испарения воды

Испарение прямо пропорционально дефициту влажности воздуха D , $D \in [0, 1]$; α – коэффициент пропорциональности:

$$\alpha := 0.1 \quad D_i := \text{rnd}(1)$$

Генерация случайного количества испарившейся воды

$$RU_i := \alpha \cdot D_i$$



Моделирование объема профильтрованной воды

Объем профильтрованной воды пропорционален текущему запасу воды в водохранилище и зависит от типа подстилающих грунтов. Эту зависимость учитываем с помощью эмпирического коэффициента k :

$$k := 0.05 \quad R\Phi(w) := k \cdot w$$

Моделирование расхода воды через плотину

$$R\Pi(w, i) := \text{if}(w_i > X_{\max}, w_i - X_{\max}, 0)$$

Моделирование запаса воды в водохранилище

```

ХТ := | X0 ← Xmax
      | W0,2 ← Xmax
      | for i ∈ 1 .. N - 1
      |   | Xi ← Xi-1 + Πi - RUi
      |   | Xi ← Xi - RΦ(Xi)
      |   | zi ← if[(Xi - Zi) ≤ Xmin, if(Xi > Xmin, Xi - Xmin, 0), Zi]
      |   | Xi ← Xi - zi
      |   | pi ← if(Xi > Xmax, Xi - Xmax, 0)
      |   | Xi ← Xi - pi
      |   | Wi,0 ← zi
      |   | Wi,1 ← pi
      |   | Wi,2 ← Xi
      | W
  
```

Результаты моделирования X_T – матрица размером $N \times 3$, первый столбец – величина расходов воды на потребление в i -е моменты времени, $i = 0 \dots N - 1$; второй столбец – текущий объем воды, сброшенной через плотину; третий столбец – текущий запас воды в водохранилище X :

$$ZZ := XT^{(0)} \quad ZП := XT^{(1)} \quad X := XT^{(2)}$$

Полученные результаты представим в виде графиков.

График реализаций расходов воды на потребление:

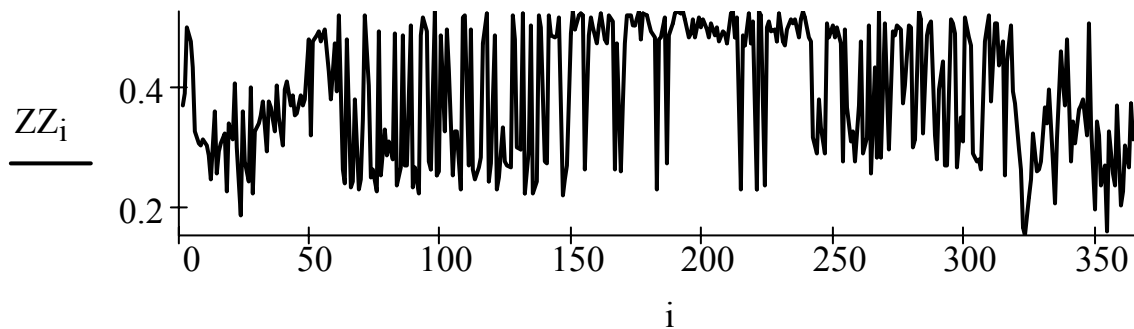


График реализаций сброса воды через плотину:

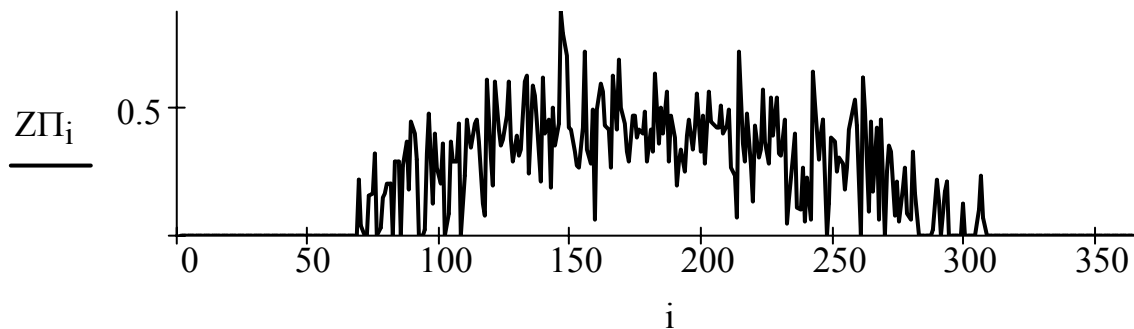
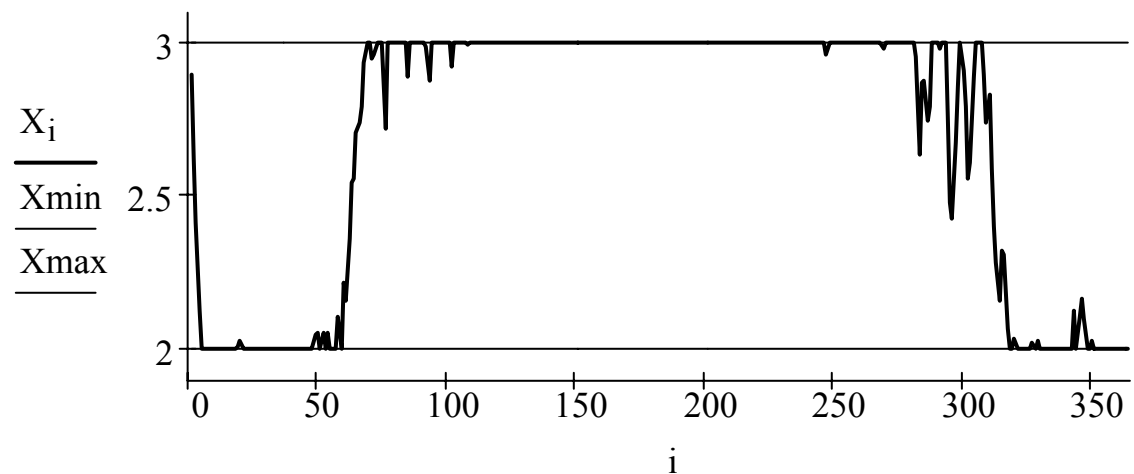


График реализаций текущего запаса воды в водохранилище:



Полный факторный эксперимент

Оптимизируемый параметр PA – обеспеченность потребностей в пресной воде (вероятностная мера), т. е. относительная частота случаев, когда запросы потребителей были полностью удовлетворены; $PA \rightarrow \max$:

$$NA_i := \text{if}(Z_i > ZZ_i, 0, 1) \quad \text{numA} := \sum_i NA_i \quad PA := \frac{\text{numA}}{N}$$

Входные управляемые факторы – верхний порог затрат воды в сельском хозяйстве $\max Z_{cx}$ и среднее значение запросов коммунального водоснабжения Skb .

Начальные значения факторов

$$\max Z_{cx} := 0.3$$

$$Skb := 0.2$$

Выберем уровни варьирования факторов

$$\Delta Z_{cx} := 0.1 \cdot \max Z_{cx}$$

$$\Delta Skb := 0.1 \cdot Skb$$

Тогда диапазоны варьирования факторов

$$\llcorner + \gg \quad \max Z_{cx} + \Delta Z_{cx} = 0.33$$

$$Skb + \Delta Skb = 0.22$$

$$\llcorner - \gg \quad \max Z_{cx} - \Delta Z_{cx} = 0.27$$

$$Skb - \Delta Skb = 0.18$$

Составим матрицу ПФЭ X (табл. П.1), в соответствии с которой проведем эксперимент. Количество параллельных опытов для каждой строки матрицы ПФЭ $r = 4$.

Таблица П.1

$$X := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Номер опыта	maxZcx		Skb	
1	-	0.34	-	0.17
2	+	0.46	-	0.17
3	-	0.34	+	0.23
4	+	0.46	+	0.23

При проведении параллельных опытов значения факторов $\max Z_{cx}$ и Skb не изменяются, а разброс величин PA в каждой строке плана эксперимента обусловлен влиянием случайных факторов.

Для пересчета случайных значений можно использовать команду меню **Math** → **Calculate Worksheet**.

Результаты экспериментов PA занесем в матрицу Y :

$$Y := \begin{pmatrix} 0.808 & 0.852 & 0.836 & 0.803 \\ 0.795 & 0.775 & 0.811 & 0.789 \\ 0.77 & 0.797 & 0.775 & 0.762 \\ 0.745 & 0.74 & 0.767 & 0.756 \end{pmatrix}$$

Определим построчные математические ожидания и дисперсии:

$$j := 0..3 \quad v := 0..3$$

$$y_{0v} := Y_{0,v} \quad y_{1v} := Y_{1,v} \quad y_{2v} := Y_{2,v} \quad y_{3v} := Y_{3,v}$$

$$MY := \begin{pmatrix} \text{mean}(y_0) \\ \text{mean}(y_1) \\ \text{mean}(y_2) \\ \text{mean}(y_3) \end{pmatrix} \quad DY := \begin{pmatrix} \text{Stdev}(y_0)^2 \\ \text{Stdev}(y_1)^2 \\ \text{Stdev}(y_2)^2 \\ \text{Stdev}(y_3)^2 \end{pmatrix} \quad DY = \begin{pmatrix} 5.409 \times 10^{-4} \\ 2.223 \times 10^{-4} \\ 2.247 \times 10^{-4} \\ 1.447 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Рассчитаем значение критерия Кохрена (см. (9.8)):

$$G := \frac{\max(DY)}{\sum_v DY_v} \quad G = 0.478$$

Квантиль распределения Кохрена (см. табл. 9.2)

$$G_{\text{табл}}(\alpha = 0.05, K = 4, f_1 = 3) = 0.6841.$$

Так как $G < G_{\text{табл}}$, то эксперимент воспроизводим.

Оценим дисперсию воспроизводимости (см. (9.9)):

$$Dv := \text{mean}(DY) \quad Dv = 2.831 \times 10^{-4}$$

Найдем оценки коэффициентов регрессионного полинома (см. (9.10)):

$$a := X^{-1} \cdot MY \quad a = \begin{pmatrix} 0.786 \\ -0.014 \\ -0.022 \\ 2.062 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Проверим значимость коэффициентов по t-критерию (см. (9.11)):

$$t_v := |a_v| \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot 4}{Dv}} \quad t = \begin{pmatrix} 186.918 \\ 3.343 \\ 5.304 \\ 0.49 \end{pmatrix}$$

Квантиль распределения Стьюдента

$$t_{\text{таб}}(\alpha, f_2) := qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, f_2\right) \quad t_{\text{таб}}(0.05, 12) = 2.179$$

Переопределим значения коэффициентов, обнулив незначимые:

$$a_v := \text{if}(t_v > 2.179, a_v, 0)$$

$$a = \begin{pmatrix} 0.786 \\ -0.014 \\ -0.022 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Линейная аппроксимация (см. (9.6)) функции отклика имеет вид

$$PA = 0.786 - 0.014 \max Z_{cx} - 0.022 Skb.$$

Рассчитаем предсказанные моделью величины выходного параметра для каждой строки плана эксперимента YM. Для сравнения рядом выведены значения построчных математических ожиданий:

$$YM := X \cdot a \quad YM = \begin{pmatrix} 0.823 \\ 0.795 \\ 0.778 \\ 0.75 \end{pmatrix} \quad MY = \begin{pmatrix} 0.825 \\ 0.792 \\ 0.776 \\ 0.752 \end{pmatrix}$$

Дисперсия адекватности (см. (9.13))

$$D_A := \frac{1}{4-3} \cdot \sum_v (YM_v - MY_v)^2 \quad D_A = 1.702 \times 10^{-5}$$

Значение критерия Фишера (см. (9.14))

$$F := \frac{D_A}{D_v} \quad F = 0.06$$

Так как $F < 1$, то линейная модель является адекватной.

Перейдем к этапу крутого восхождения.

Выберем шаг поиска вдоль направления градиента.

Поскольку $|a_2| > |a_1|$, то установим величину шага для фактора Skb (это второй из исследуемых факторов):

$$h_2 := -0.05$$

Рассчитаем шаг для фактора $\max Z_{cx}$ (см.(9.19)):

$$h_1 := \frac{a_1 \cdot \Delta Z_{cx}}{a_2 \cdot \Delta Skb} \cdot h_2 \quad h_1 = -0.047$$

Определим координаты новой точки:

$$\max Z_{cx} := \max Z_{cx} + h_1 \quad Skb := Skb + h_2$$

Проведем серию параллельных опытов при новых значениях факторов. Результаты экспериментов РА сохраним в массиве y :

$$y_v :=$$

0.885
0.879
0.868
0.907

$$\text{mean}(y) = 0.885$$

Сравним среднее значение выходного параметра с усредненной величиной построчных математических ожиданий, полученных на предыдущем этапе ПФЭ:

$$MY = \begin{pmatrix} 0.825 \\ 0.792 \\ 0.776 \\ 0.752 \end{pmatrix}$$

$$\text{mean}(MY) = 0.786$$

$$0.885 > 0.786$$

Значение параметра оптимизации РА улучшилось.

Сделаем следующий шаг по направлению градиента:

$$\max Z_{cx} := \max Z_{cx} + 2 \cdot h_1$$

$$Skb := Skb + 2 \cdot h_2$$

Получим новые значения функции отклика:

$$y_v :=$$

0.997
0.997
0.995
0.997

$$\text{mean}(y) = 0.996$$

Проверим, не является ли найденная точка точкой экстремума функции отклика $PA = \Phi(\max Z_{cx}, Skb) \rightarrow \max$.

Перенесем центр плана в точку с координатами

$$\max Z_{cx} = 0.206$$

$$Skb = 0.1$$

Выберем уровни варьирования факторами

$$\Delta Z_{cx} := 0.1 \cdot \max Z_{cx}$$

$$\Delta Skb := 0.1 \cdot Skb$$

Проведем ПФЭ, как это описано выше.

Полученные результаты запишем в матрицу Y :

$$Y := \begin{pmatrix} 0.997 & 0.997 & 0.997 & 0.997 \\ 0.997 & 0.997 & 0.997 & 0.992 \\ 0.997 & 0.997 & 0.997 & 0.997 \\ 0.995 & 0.995 & 0.992 & 0.997 \end{pmatrix}$$

Проверим однородность дисперсии воспроизводимости:

$$DY = \begin{pmatrix} 0 \\ 6.25 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 4.25 \times 10^{-6} \end{pmatrix} \quad G := \frac{\max(DY)}{\sum_v DY_v}$$

$$G = 0.595$$

$G < G_{\text{табл}} = 0.6841$, следовательно, эксперимент воспроизводим.

Оценим дисперсию воспроизводимости:

$$Dv := \text{mean}(DY) \quad Dv = 2.625 \times 10^{-6}$$

Найдем коэффициенты модели и проверим их значимость:

$$a = \begin{pmatrix} 0.996 \\ -8.75 \times 10^{-4} \\ -2.5 \times 10^{-4} \\ -2.5 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \quad t = \begin{pmatrix} 2.459 \times 10^3 \\ 2.16 \\ 0.617 \\ 0.617 \end{pmatrix}$$

Так как для всех коэффициентов полинома, кроме a_0 , выполняется условие $t_v < t_{\text{таб}} = 2.179$, то коэффициенты a_1, a_2, a_3 можно считать незначимыми: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Область экстремума достигнута.

Оптимальные значения факторов

$$\max Z_{cx} = 0.206, \quad Skb = 0.1.$$

С учетом отклонения ± 0.03 потребление воды со стороны коммунального водоснабжения может составить $\max Z_{kb} = Skb + 0.03 = 0.13$.

Соотношение максимальных запросов потребителей

$$\max Z_{cx} / \max Z_{kb} \approx 1.585.$$

Распределение ресурса воды $Z\Sigma$ между потребителями осуществляется пропорционально их запросам, т. е.

$$Z_{kb} \leq 0.387 \cdot Z\Sigma, \quad Z_{cx} \leq 0.613 \cdot Z\Sigma.$$

Эти условия определяют оптимальную стратегию управления запасами воды в водохранилище.

Библиографический список

Бабаков, М. Ф. Методы машинного моделирования в проектировании электронной аппаратуры [Текст] : учеб. пособие / М. Ф. Бабаков, А. В. Попов. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2002. – 89 с.

Бабаков, М. Ф. Математические модели электронных аппаратов и систем [Текст] : учеб. пособие / М. Ф. Бабаков, А. В. Попов, М. И. Луханин – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2003. – 109 с.

Бабаков, М. Ф. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности электронных средств [Текст] : учеб. пособие по лаб. практикуму / М. Ф. Бабаков, А. В. Попов. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2000. – 167 с.

Бендат, Дж. Прикладной анализ случайных данных [Текст] : пер. с англ. / Дж. Бендат, А. Пирсол; под ред. И. Н. Коваленко. – М. : Мир, 1989. – 540 с.

Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения [Текст] / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Высш. шк., 2000. – 480 с.

Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Высш. шк., 2000. – 383 с.

Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2000. – 479 с.

Горстко, А. Б. Познакомьтесь с математическим моделированием [Текст] / А. Б. Горстко. – М. : Знание, 1991. – 160 с.

Карлин, Л. Н. Управление энвиронментальными и экологическими рисками [Текст] : учеб. пособие / Л. Н. Карлин, В. М. Абрамов. – СПб. : РГГМУ, 2006. – 322 с.

Половко, А. М. Mathcad для студента [Текст] / А. М. Половко, И. В. Ганичев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2006. – 336 с.

Половко, А. М. Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации [Текст] / А. М. Половко, П. Н. Бутусов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 320 с.

Томашевський, В. М. Моделювання систем [Текст] / В. М. Томашевський. – К. : Видавнича група ВНУ, 2005. – 352 с.

Шеннон, Р. Имитационное моделирование систем: искусство и наука [Текст] / Р. Шеннон. – М. : Мир, 1978. – 424 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Геоинформационные системы. Оценка рисков.....	4
2. Моделирование систем. Основные понятия.....	11
3. Методы и этапы разработки имитационных моделей.....	16
4. Теоретико-вероятностные модели факторов.....	22
4.1. Биномиальный закон распределения.....	23
4.2. Закон Пуассона.....	24
4.3. Равномерный закон распределения.....	25
4.4. Экспоненциальное распределение.....	25
4.5. Нормальное распределение.....	26
4.6. Распределение Рэлея.....	27
4.7. Гамма-распределение.....	27
4.8. Многомерный закон распределения.....	28
4.9. Модели случайных процессов.....	31
5. Статистические модели факторов.....	34
6. Эмпирические модели факторов.....	40
7. Программная реализация имитационной модели.....	46
7.1. Методы моделирования случайных факторов.....	48
7.1.1. Имитация значений стандартной равновероятной величины.....	48
7.1.2. Моделирование независимых случайных событий.....	49
7.1.3. Моделирование сложных событий.....	50
7.1.4. Моделирование условных событий.....	50
7.1.5. Моделирование дискретных случайных величин.....	51
7.1.6. Моделирование непрерывных случайных величин.....	52
7.1.7. Моделирование случайных величин с произвольным эмпирическим распределением.....	55
7.1.8. Моделирование случайных векторов.....	59
7.1.9. Моделирование случайных процессов.....	60
8. Проверка достоверности и адекватности модели.....	64
9. Планирование имитационных экспериментов.....	67
9.1. Факторный план.....	67
9.2. Схема полного факторного эксперимента.....	70
9.3. Обработка данных эксперимента.....	72
9.4. Проверка адекватности уравнения регрессии.....	75
9.5. Поиск экстремальных значений на поверхности отклика.....	76
Приложение. Модель управления запасами воды в водохранилище.....	79
Библиографический список.....	98

Навчальне видання

**Васильєва Ірина Карлівна
Попов Анатолій Владиславович
Єльцов Павло Євгенович**

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
В ГЕОІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ**

(Російською мовою)

Редактор С. П. Гевло

Зв. план, 2014

Підписано до друку 30.04.2014

Формат 60×84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк

Ум. друк. арк. 5,5. Обл.-вид. арк. 6,25. Наклад 75 пр.

Замовлення 156. Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

"Харківський авіаційний інститут"

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Видавничий центр "ХАІ"

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001