

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ
Государственный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского
"Харьковский авиационный институт "

М.Ф. Бабаков, А.В. Попов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ,
ТЕХНОЛОГИИ И НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРОННЫХ
СРЕДСТВ

Учебное пособие по лабораторному практикуму

**FOR PUBLIC
RELEASE**

Харьков «ХАИ» 2000

УДК 621.396.6

Теоретические основы конструирования, технологии и надежности электронных средств /М.Ф. Бабаков, А.В. Попов. -Учеб. пособие по лабораторному практикуму - Харьков: Гос. аэрокосмический ун-т "Харьк. авиац. ин-т ", 2000. – 167 с.

Приведены лабораторные работы по курсу "Теоретические основы конструирования, технологии и надежности электронных средств", которые входят в программу подготовки бакалавров по направлению "Электронные аппараты". В текстах описаний лабораторных работ также изложены необходимые теоретические сведения, постановка задач, методика выполнения работ, необходимые справочные данные.

Многие работы ориентированы на использование системы MathCAD.

Для студентов факультета радиотехнических систем летательных аппаратов.

Ил. 60. Табл.15 Библиогр.: 7 назв.

Рецензенты: канд. техн. наук, доц. К.В. Скульский,
канд. техн. наук С.И. Хоменко

© Государственный аэрокосмический университет
им. Н.Е.Жуковского
"Харьковский авиационный институт ", 2000 г.

Лабораторная работа № 1

Принципы построения и работы современного аналогового вычислительного комплекса

Цель работы:

- изучить принципы построения современных аналоговых вычислительных комплексов на примере АВК-4;
- освоить приемы использования узлов и блоков комплекса для решения задач аналогового моделирования систем и процессов.

Постановка задачи

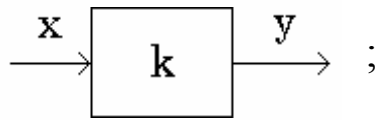
Мощным средством реализации математических моделей систем являются электронные вычислительные машины, которые позволяют выполнять цифровое, аналоговое и смешанное моделирование.

При аналоговом моделировании уравнения исследуемой системы отображаются физическими процессами, которые происходят в схеме, составленной из решающих элементов аналоговой вычислительной машины (АВМ), и описываются теми же уравнениями. Аналогами переменных моделируемой системы являются токи в элементах аналоговых ЭВМ — машинные переменные.

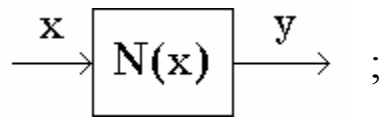
Анализ физических систем, описываемых в большинстве случаев обыкновенными дифференциальными уравнениями, обнаруживает три типа элементарных причинно-следственных связей между физическими переменными:

— безынерционные преобразования причины вследствие двух видов:

а) линейные (например, сила — ускорение, напряжение — ток, заряд — потенциал и т.д.), отображаемые уравнением вида $y=kx$ и элементом структурной схемы



б) нелинейные (скорость — сила трения, напряженность магнитного поля — индукция в железе и т.п.), отображаемые уравнением вида $y=N(x)$ и элементом структурной схемы



— безынерционные преобразования типа алгебраического суммирования, отображаемые уравнением вида

$$y = \sum_{i=1}^k x_i - \sum_{j=k+1}^n x_j$$

и элементом структурной схемы, показанной на рис. 1.1;

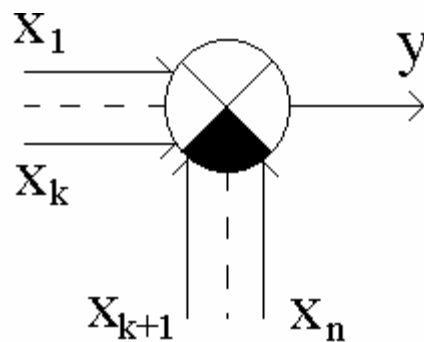


Рис. 1.1. Схема сумматора

— преобразования типа накопления (ускорение — скорость — перемещение, ток — заряд, мощность — энергия и т.п.), описываемые уравнением

$$y(t) = y(0) + \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

и элементами структурной схемы



где $1/p$, $x(p)$, $y(p)$ - изображение (по Лапласу) операции интегрирования и функций $x(t)$, $y(t)$.

С помощью указанных элементов представляют динамику системы в виде структурной схемы, когда необходимо отобразить взаимосвязи между всеми переменными, существенными для характеристики состояния исследуемой динамической системы.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Движение материальной точки массой m по наклонной плоскости (рис. 1.2).

Первопричиной движения системы (входом) является угол $\alpha(t)$ наклона плоскости, который служит причиной возникновения силы $f_1(t) = mg \cdot \sin \alpha(t)$. Под воздействием силы $f_1(t)$ (причина) точка приобретает ускорение $x''(t) = \frac{1}{m} f(t)$ (следствие). В результате движения с ускорением $x''(t)$ точка в момент времени t приобретает скорость

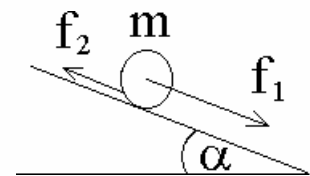


Рис. 1.2. Схема движения материальной точки

$$x'(t) = v(t) = x'(0) + \int_0^t x''(\tau) d\tau . \quad (1.2)$$

С началом движения возникает трение, сила которого f_2 зависит от скорости и направлена противоположно силе f_1 , т.е. результирующая ускоряющая сила равна $f_1 - f_2$. Наконец, при движении со скоростью $x'(t)$ к моменту времени t (причина) точка m проходит путь $x(t) = x(0) + \int_0^t x'(\tau) d\tau$ (следствие). Объединение указанных

причинно-следственных связей с учетом нелинейной зависимости $f_2 = N(x)$ можно представить структурной схемой процесса, показанной на рис. 1.3.

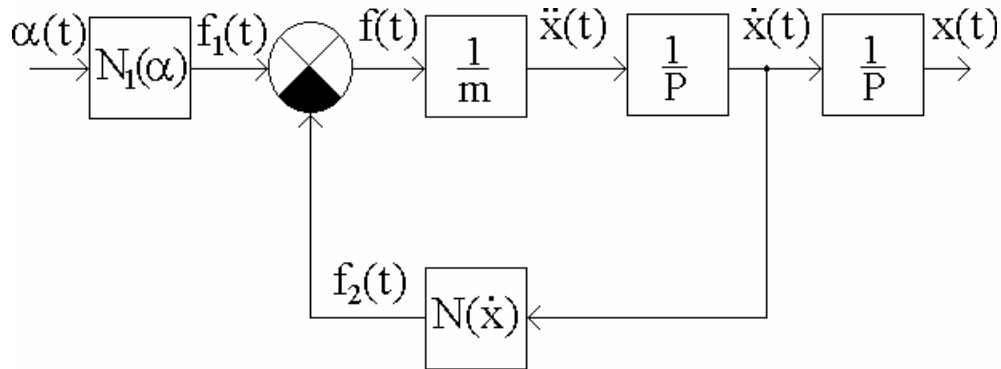


Рис. 1.3. Структурная схема процесса движения

Пример 2. Тело массой m из материала теплоемкостью c нагревают электрическим током мощностью $P(t) = \frac{u^2(t)}{R}$. В результате нагревания в течение времени t тело приобретает количество тепла $Q(t)$, а его температура увеличивается до $t^\circ = \frac{Q(t)}{mc}$. Из-за перепада температур Δt° тела $t^\circ(t)$ и окружающей среды $t_0^\circ(t)$ возникает поток тепла $P_0(t)$ от тела к окружающей среде. Величина этого потока зависит от условий теплообмена. Поток тепла (мощность) $P_H(t)$, вызывающий нагрев тела, равен разности между нагревом $P(t)$ и отводом тепла в среду $P_0(t)$, т.е. $P_H(t) = P(t) - P_0(t)$. Теплообмен происходит посредством теплопроводности, конвекции и излучения. В общем случае поток тепла $P_0(t)$ нелинейно зависит от Δt .

Структура, соответствующая указанным явлениям, показана на рис.1.4.

Пример 3. Анализ RC-цепи. Ток в цепи проще всего определить как $\frac{U_R}{R} = I$. При протекании тока $I(t)$ в течение времени t конденса-

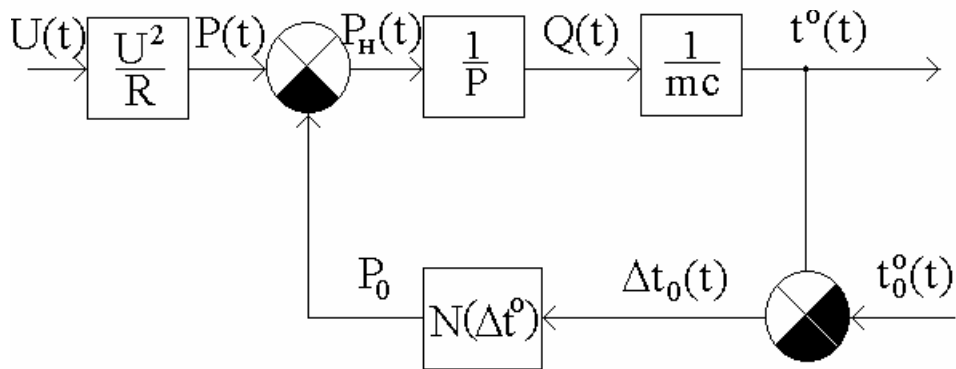


Рис. 1.4. Структурная схема процесса теплообмена

сатор C накапливает заряд $q(t)$, заряжаясь до $U_C = q(t)/C$.

Напряжение $U_R(t)$ равно разности между входным напряжением $U(t)$ и напряжением на конденсаторе $U_C(t)$, т.е. $U_R(t) = U(t) - U_C(t)$. Структура, соответствующая этим процессам, показана на рис. 1.5.

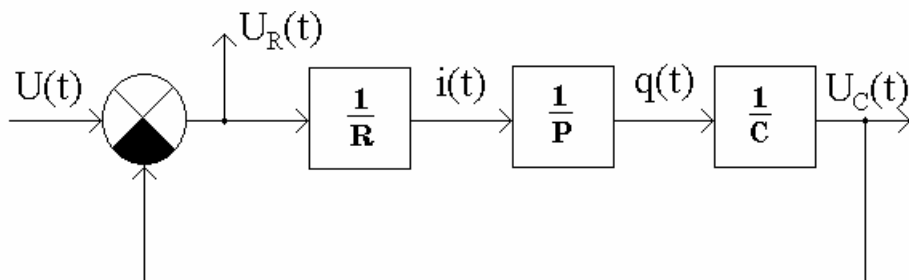


Рис. 1.5. Структурная схема процесса изменения напряжения

Приведенные примеры подтверждают достаточность набора структурных элементов для аналогового моделирования систем.

Достоинствами аналогового моделирования являются:

- простота и наглядность;
- быстрота решения дифференциальных уравнений;
- возможность осуществления полунатурного моделирования, т.е. совмещения с реальными частями исследуемых систем.

Существуют различные типы АВМ, отличающиеся элементной базой, порядком решаемых дифференциальных уравнений, типами

нелинейностей, сервисными устройствами и возможностью совмещения с ЦВМ. Соединение АВМ с различными дополнительными устройствами называют аналоговым вычислительным комплексом (АВК). В данной работе рассмотрен АВК-4 (разработан инженерным центром МФТИ, г. Москва), по существу представляющий собой аналоговый персональный компьютер.

Техническое описание АВК-4

Основные характеристики:

- а) порядок решаемых уравнений - до четвертого;
- б) режимы интегрирования:
 - непрерывный,
 - однократный с начальными условиями,
 - периодический с начальными условиями;
- в) ввод начальных условий от источников:
 - внутренних,
 - внешних;
- г) время интегрирования - от 10^{-2} с до 10 с;
- д) диапазон переменных - ± 10 В;
- е) погрешность при решении типовых задач - не более 10%;
- ж) питание АВМ и приборов - от встроенного стабилизированного источника питания;
- з) питание АВК - от сети переменного тока напряжением 220 В +5%.

Конструкция комплекса

Конструктивно АВК выполнены в виде отдельных функционально законченных блоков, заключенных в единый корпус. Центральное место занимает АВМ, в которую входит служебный блок и монтажное поле со сменными линейными и нелинейными решающими блоками. Вспомогательные функции выполняет система индикационно-измерительных средств, в которую входят:

- источники эталонных напряжений $\pm 1\text{В}$ и $\pm 10\text{В}$;
- два регулируемых делителя напряжения;
- вольтметр;
- электронно-лучевой индикатор;
- электронный коммутатор;
- генератор системы синхронных сигналов.

Работа всех блоков обеспечивается встроенным блоком питания.

Рассмотрим кратко принципы работы основных блоков.

1. Генератор, передняя панель которого изображена на рис. 1.6, является источником синхронных сигналов прямоугольной, треугольной и синусоидальной форм. Амплитуду каждо-

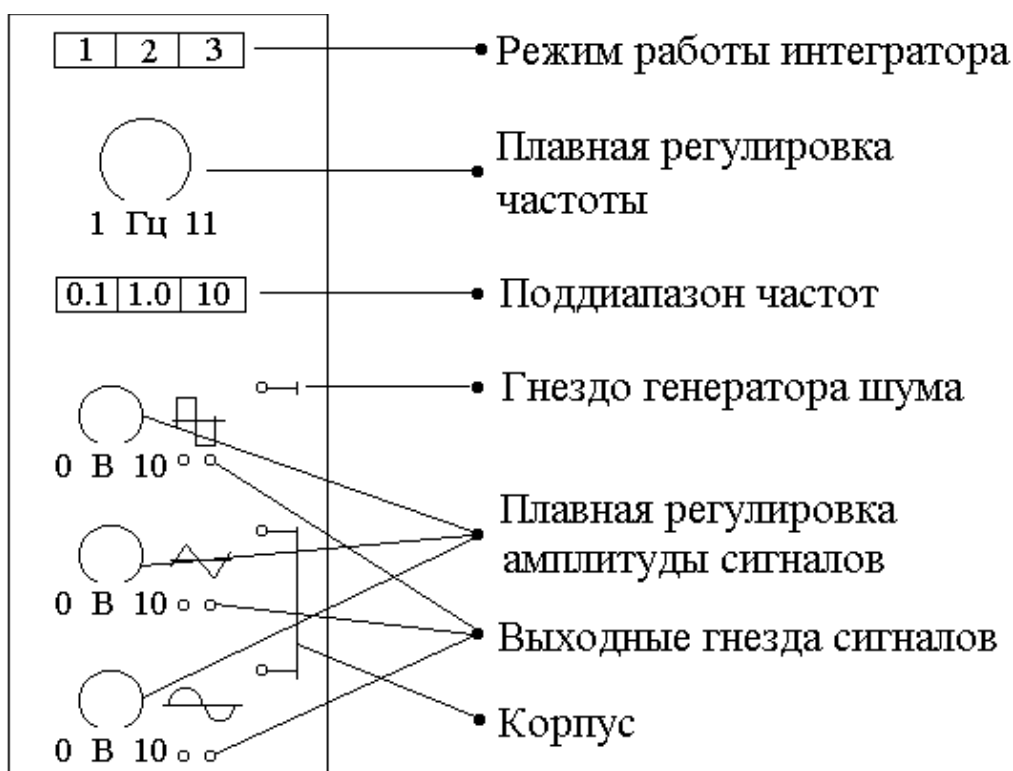


Рис. 1.6. Блок генераторов

го из сигналов независимо от остальных можно изменять в диапазоне $0...10\text{В}$. Частоту всей системы сигналов можно регулировать в диапазоне $0,1...1100\text{Гц}$. Диапазон частот разбит на четыре поддиа-

пазона, отличающиеся друг от друга в десять раз. Внутри поддиапазона частоту изменяют плавно в отношении 1 : 11.

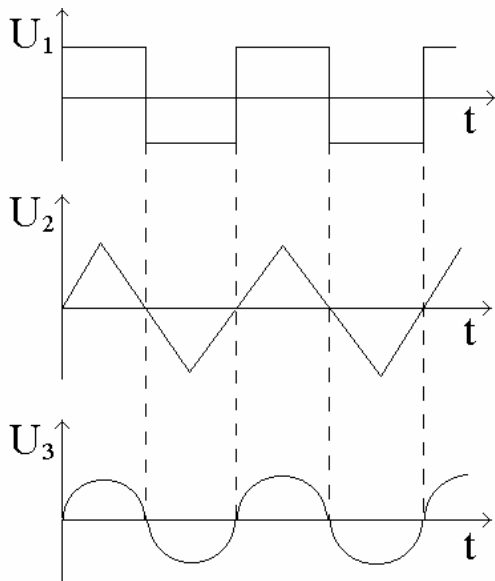


Рис. 1.7. Эпюры напряжений генераторов

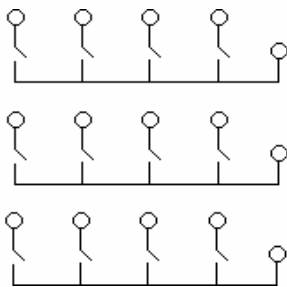


Рис. 1.8. Передняя панель коммутатора

У, Z. При поступлении импульсов происходит синхронное отпирание ключей и соответствующие входные сигналы поступают на входы сумматоров СУ1 (канал X), СУ2 (канал Y), СУ3 (канал Z), а с их выходов - на входы индикатора.

Таким образом, коммутатор осуществляет вырезки не пересекающихся во времени сигналов по каждому из четырех входов каждого канала.

На рис. 1.7 показаны эпюры напряжений сигналов, формируемых генератором.

2. Коммутатор, передняя панель которого показана на рис. 1.8, предназначен для коммутации входных сигналов и имеет 12 входов (по четыре вида на канал), три выхода (X, Y и Z каналы) и работает на четыре такта, синхронно подключая за каждый такт три входа к трем выходам. Частота коммутации (опроса) входов составляет 2,5 кГц.

Блок-схема коммутатора изображена на рис. 1.9. Прямоугольные импульсы от генератора (ГИ) поступают на распределитель импульсов (РИ). На его четырех выходах образуются импульсы, сдвинутые по времени относительно друг друга. Каждый выход РИ связан с цепями управления четырьмя ключами, находящимися в каналах X,

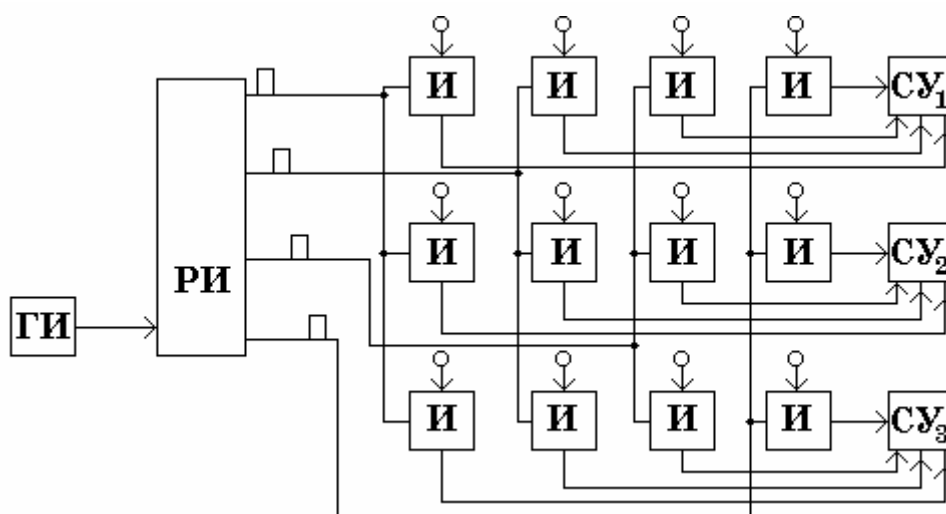


Рис. 1.9. Блок-схема коммутатора

3. Блок служебный применяют для следующих целей:

- выполнения вспомогательных операций при моделировании;
- настройки и измерений коэффициентов модели;
- управления индикатором и внешними регистрирующими приборами.

Служебный модуль, передняя панель которого показана на рис.1.10, объединяет такие элементы:

- два сумматора;
- источники эталонных напряжений +10 В, +1 В, -10 В, -1 В;
- два делителя напряжений;
- вольтметр;
- пульт управления индикатором;
- две шины размножения сигналов.

Сумматор используют для суммирования сигналов. При этом сигналы, поступающие на зачерненный вход, вычитаются из сигнала, поступающего на незачерненный вход.

Источник эталонных напряжений (эталон (Э)) вырабатывает эталонные напряжения, которые посредством проводников и перемычек можно снимать с соответствующих гнезд.

Делитель (Д) воспроизводит входной сигнал с коэффициентом передачи, регулируемым в пределах 0...1.

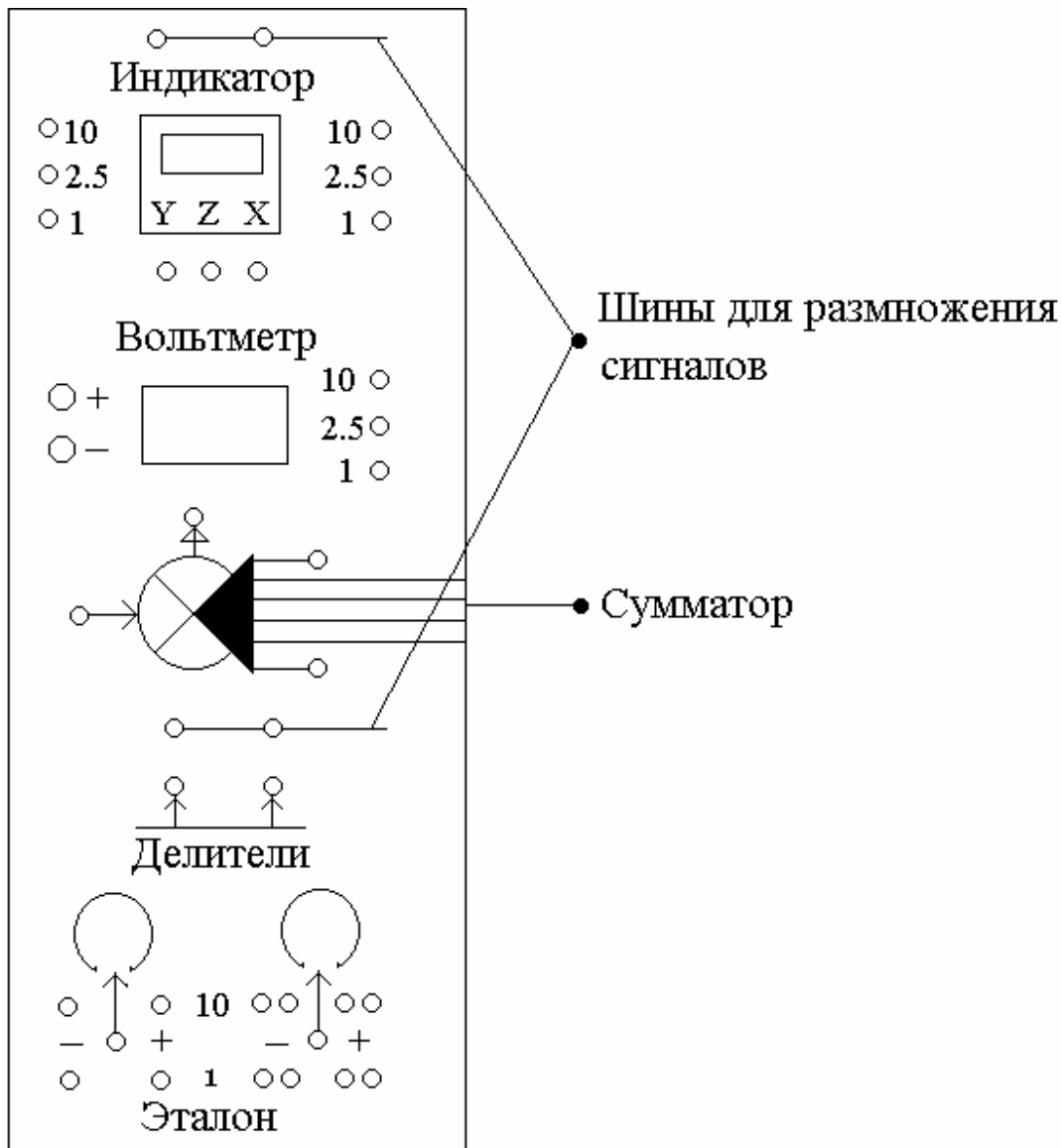


Рис. 1.10. Передняя панель блока служебного

Вольтметр (В) предназначен для измерения постоянных напряжений в диапазонах 0...1 В; 0...2,5 В; 0...10 В. Знак напряжения указывает один из светодиодов.

4. Индикатор (Ин) с электронно-лучевой трубкой (ЭЛТ) предназначен для наблюдения формы и измерения величины электрических сигналов 0...1 В, 0...2,5 В, 0...10 В в диапазоне частот 0...50 кГц.

Мнемосхема пульта управления индикатором изображена на рис. 1.10. Органы регулировки положения луча, яркости и фокуси-

ровки находятся в конструктивном углублении на левой панели АВК (под ЭЛТ).

Индикатор имеет два независимых канала X и Y, а также канал управления яркостью.

5. Блок линейный (интегратор) предназначен для интегрирования во времени входных сигналов (напряжений $0... \pm 10$ В). Выход интегратора — напряжение $0... \pm 10$ В. Передняя панель блока показана на рис. 1.11. На входе интегратора предусмотрена возможность суммирования трех входных сигналов с коэффициентами:

- 1;
- $0...1$ (регулируемый усилитель “b”);
- $0...10$ или $0...1$ в зависимости от положения переключки (регулируемый усилитель “k”).

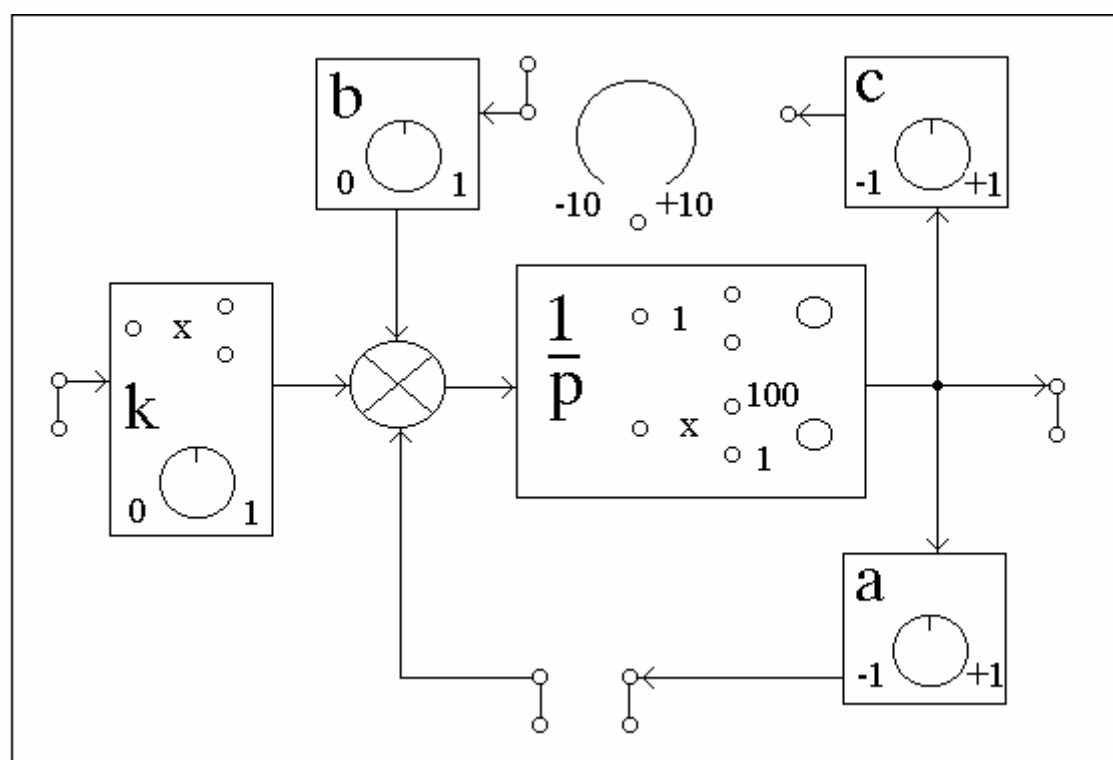


Рис. 1.11. Интегратор

Коэффициент передачи интегратора (величина, обратная постоянной интегрирования) равен 1 или 100 в зависимости от поло-

жения переключки. Коэффициенты усиления “а” и “с” можно регулировать от +1 до -1. Схема усилителей и их передаточные функции показаны на рис.1.12.

Диапазон изменения начальных условий интегрирования от -10 В до +10 В. Начальные условия подаются на панель интегратора с помощью переключки.

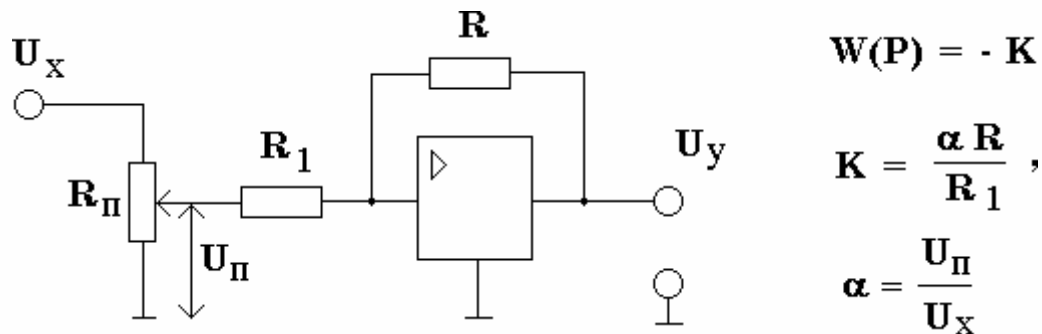


Рис. 1.12. Схема усилителей

Возможно интегрирование в трех режимах:

- непрерывном;
- однократном;
- периодическом (с установкой начальных условий в начале каждого такта).

Выбор режима интегрирования осуществляют кнопками 1, 2, 3 (см. рис. 1.6). Световые диоды на панели интегратора сигнализируют о перегрузке его выхода.

Интегратор построен по стандартной схеме интегрального операционного усилителя с емкостью в цепи обратной связи. Его схема и передаточная функция показаны на рис. 1.13.

6. Блок нелинейный (нелинейность) предназначен для моделирования нелинейных функций одной переменной. В состав блока (рис. 1.14) входят:

- сумматор на три входа (один из которых - инверсный);
- модуль нелинейных функций;
- усилители с регулируемыми коэффициентами “а”, “b”, “k”.

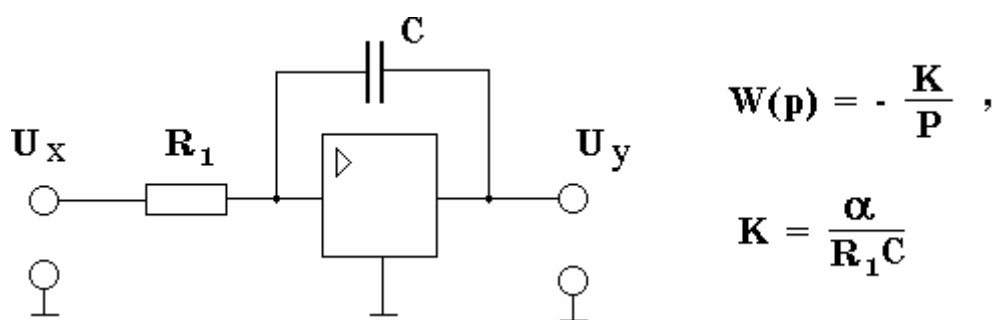


Рис. 1.13. Схема интегратора

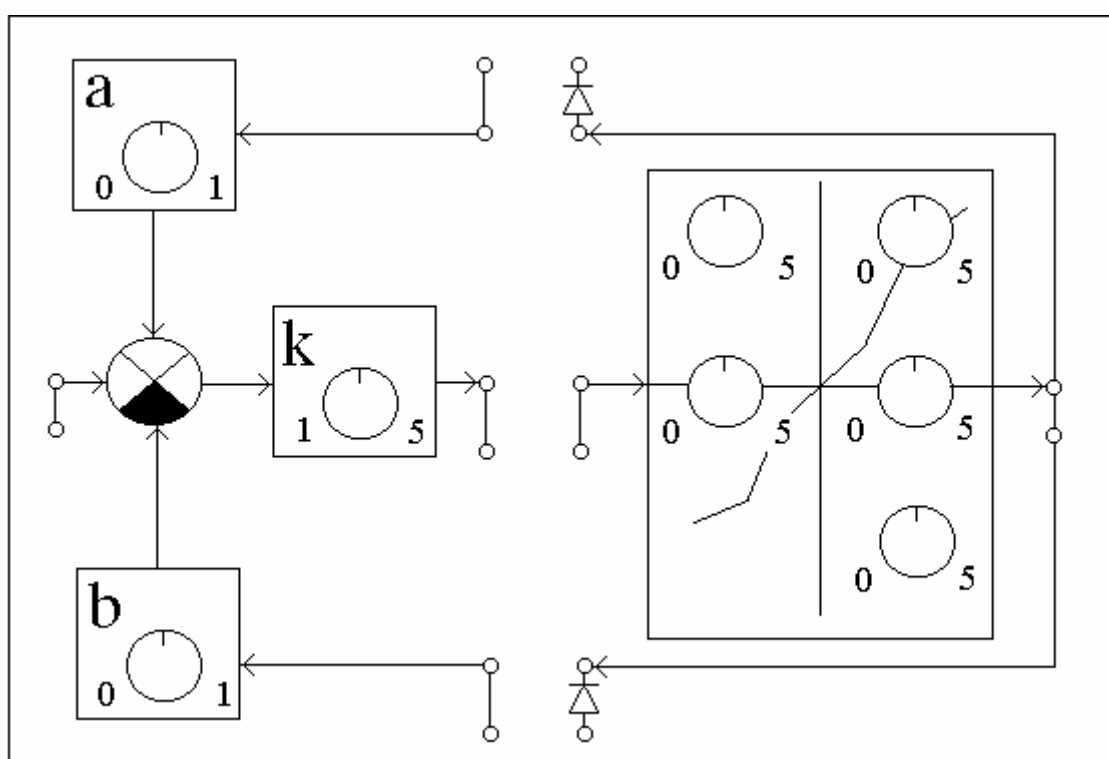


Рис. 1.14. Блок нелинейный

Модуль нелинейности с помощью пяти ручек регулировки позволяет осуществлять ступенчатую аппроксимацию однозначной нелинейности. Использование обратных связей, встроенных диодов, а также различных точек съема выходного сигнала позволяет моделировать широкий класс однозначных, двузначных и петлевых нелинейностей.

Методика настройки и регулировки блоков АВК и принципы решения типовых задач

Проверка работы блока генераторов

Для того, чтобы убедиться в правильности работы блока генераторов сигналов следует воспользоваться индикатором, собрав схему, пользуясь рис. 1.15. В качестве развертывающего сигнала необходимо использовать сигнал $\Delta(t)$ генератора треугольного сигнала. Проверяемые сигналы поочередно подают на вход Y индикатора.

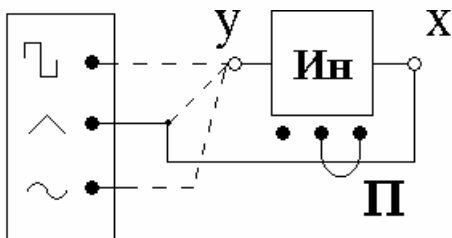


Рис. 1.15. Проверка блока генераторов

Поскольку сигнал $\Delta(t)$ имеет возрастающую и спадающую части, то на экране ЭЛТ появляется изображение сигнала, состоящее из двух частей, соответствующих прямому и обратному ходу сигнала развертки.

Для гашения луча при обратном ходе сигнала развертки достаточно установить переключку Π , как показано на рис. 1.15, т.е. замкнуть точки Z и X , при прямом — перемкнуть точки Y и Z . Амплитуду наблюдаемых сигналов, их частоту, а также величину развертки сигнала изменяют с помощью органов регулировки (см. рис. 1.16), а также используя входы X и Y индикатора с различными коэффициентами усиления.

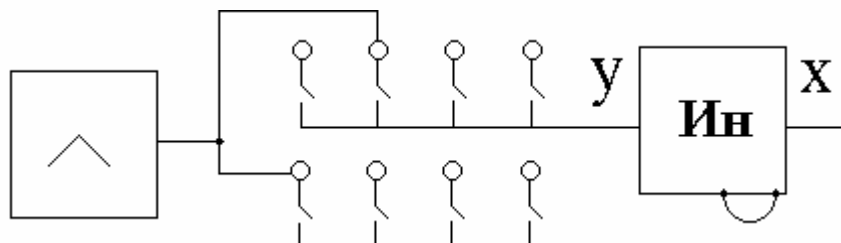


Рис. 1.16. Построение осей координат

Применение коммутатора при решении задач моделирования

Коммутатор можно использовать для одновременного наблюдения на экране ЭЛТ нескольких сигналов.

1. Построение на экране осей координат. Для этого необходимо собрать схему, изображенную на рис. 1.16, используя для отклонения луча ЭЛТ прямой (или обратной) ход развертки и сигнал $\Delta(t)$, а также две линейки коммутатора с несовпадающими входами.

2. Одновременное наблюдение на экране ЭЛТ осей координат и сигнала. Для этого используют предыдущую схему соединений, а также дополнительно один из входов линейки Y коммутатора для подключения анализируемого сигнала и соответствующий вход линейки X для прямой (или обратной) его развертки. В качестве примера на рис.1.17 изображена схема наблюдения синусоидального сигнала.

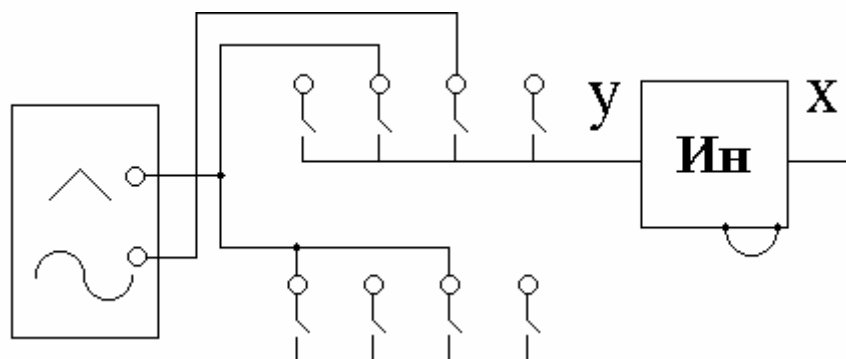


Рис. 1.17. Построение синусоиды в осях координат

Использование коммутатора и вольтметра для измерения координат точек наблюдаемых сигналов

Для решения этой задачи необходимо собрать схему, содержащую коммутатор, делитель и вольтметр. На рис. 1.18 показана схема для наблюдения амплитуды точек синусоиды (основой служит

предыдущая схема). Регулируя ручкой делителя его выходное напряжение, следует сместить соответствующую точку Y на экране ЭЛТ и показания вольтметра одновременно. С помощью развертки по оси X преобразовать измерительную точку луча в линию, которую можно затем подвести к любой точке наблюдаемого сигнала и измерить вольтметром ее амплитуду.

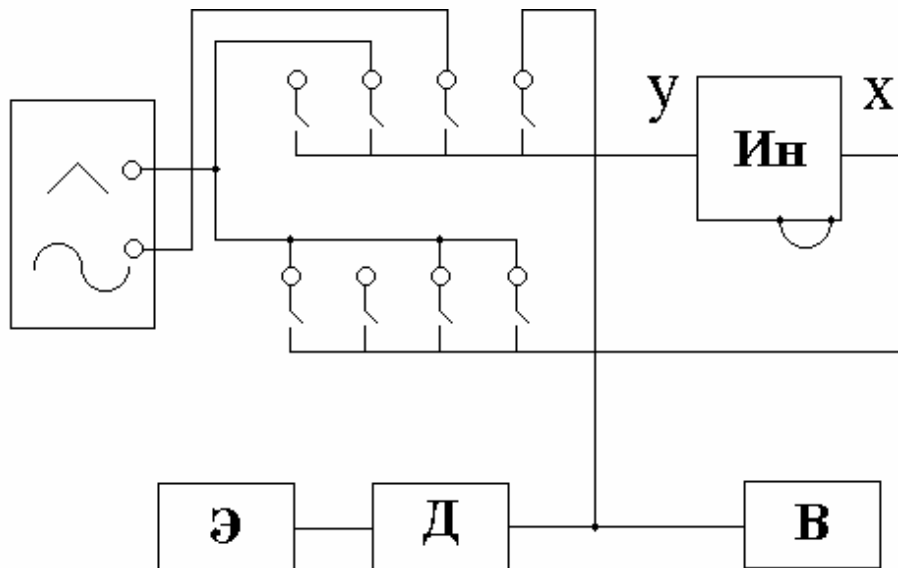


Рис. 1.18. Измерение координат

Проверка работы блока интегратора

Такую проверку осуществляют путем подачи на его вход постоянного уровня напряжения $x(t)=c$. При этом на выходе (с учетом гашения обратного хода луча) наблюдают линейную функцию

$$y(t) = ct + y(0),$$

где $y(0)$ - начальные условия (НУ) интегрирования, которые следует ввести с усилителя начальных условий с помощью переключки. Контроль уровня начальных условий производить вольтметром.

Схема набора на АВК изображена на рис. 1.19.

Настройка блока нелинейностей

Для настройки блока (установление нелинейности заданного

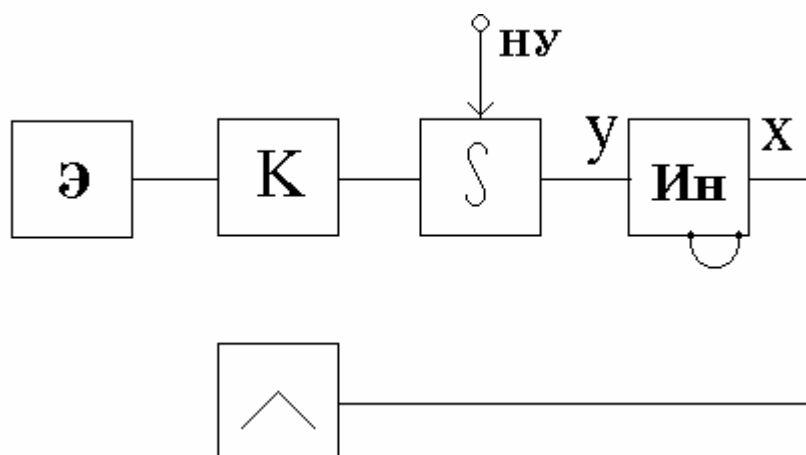


Рис. 1.19. Проверка интегратора

вида) необходимо использовать схему, изображенную на рис. 1.20. При этом на экране индикатора появится изображение нелинейности. С помощью ручек регулировки, а также используя различные соединения элементов (таблица), необходимо получить требуемую нелинейность, которую затем применяют при моделировании.

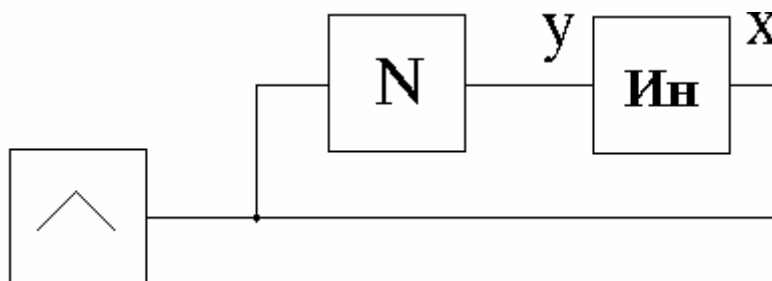


Рис. 1.20. Настройка нелинейности

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с техническим описанием АВК и его конструкцией.
2. Собрать схему по рис. 1.15 и проверить блок генераторов. Убедиться в наличии эффекта "обратного хода луча".
3. Собрать схему для наблюдения на индикаторе синусоидального сигнала в осях координат и проверить ее работоспособность.

Схемы моделирования нелинейностей

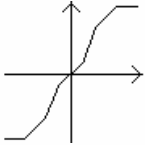
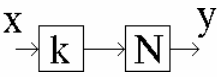
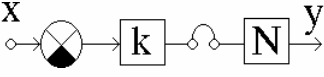
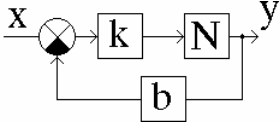
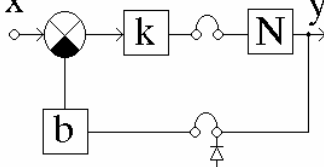
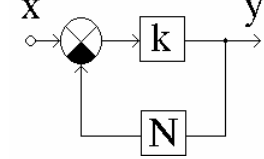
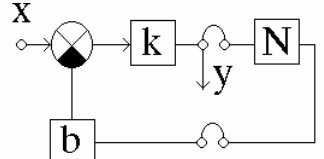
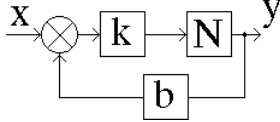
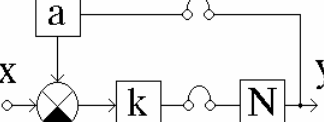
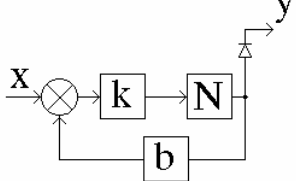
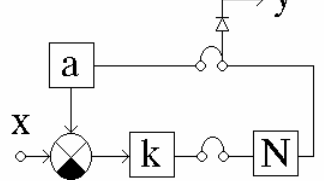
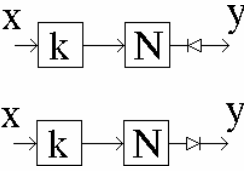
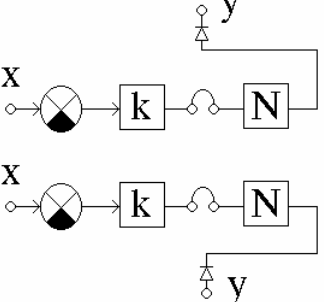
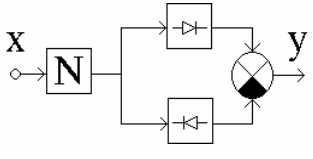
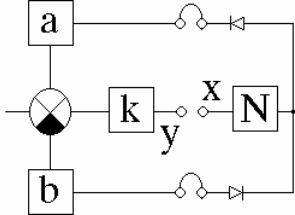
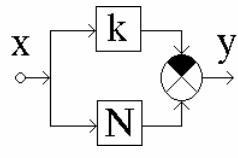
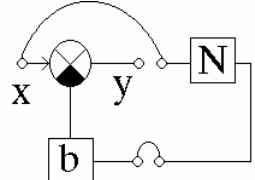
№ п/п	Вид нелинейности	Схема нелинейности	Схема набора нелинейности
1	Однозначная ломаная нелинейность 		
2	Охват нелинейности отрицательной обратной связью		
3	Нелинейность в цепи отрицательной обратной связи		
4	Охват нелинейности положительной обратной связи с $k\beta=1$, $k\beta>1$, $k\beta<1$		
5	Релейная характеристика		
6	Односторонние характеристики		

Таблица (окончание)

Схемы моделирования нелинейностей

№ п/п	Вид нелинейности	Схема нелинейности	Схема набора нелинейности
7	Квадратичные характеристики		
8	Многозначные характеристики		

4. Собрать схему для наблюдения синусоидального сигнала в осях координат и измерения координат точек сигнальной кривой. Убедиться в ее работоспособности.

5. Собрать схему для проверки работы сумматора и наблюдать на экране ЭЛТ суммируемые сигналы (заданы произвольно) и результат суммирования. Использовать прямые и инверсный входы сумматора.

6. Собрать схему для проверки работы интегратора. Убедиться в работоспособности интегратора и влиянии начальных условий.

7. Собрать схему для проверки блока нелинейности. Осуществить моделирование нелинейностей, представленных в таблице.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1. Схемы набора задач, указанных выше (см. “Порядок выполнения работы”).
2. Эпюры наблюдаемых входных и выходных сигналов.

Контрольные вопросы

1. Какие элементы лежат в основе аналогового моделирования сигналов и систем?
2. Какой диапазон переменных используют в АВК-4?
3. В чем заключается общность стандартных сигналов в АВК-4?
4. Для чего необходим коммутатор сигналов?
5. Перечислить основные модули блока служебного АВК. Каковы их функции?
6. Чем индикатор отличается от обычного осциллографа?
7. В чем состоит эффект "обратного хода луча" и как от него избавиться?
8. Укажите уровни эталонных сигналов АВК-4.
9. Для чего некоторые служебные модули имеют несколько входов?
10. Обоснуйте схему набора для решения задач (см. "Порядок выполнения работы").

Лабораторная работа № 2

Цифровое моделирование детерминированных сигналов и воздействий

Цель работы:

- изучить методику цифрового моделирования детерминированных воздействий и их спектрального анализа;
- получить навыки использования системы MathCAD для моделирования и представления сигналов и воздействий.

Необходимые теоретические сведения

Одним из важнейших инструментов автоматизированного проектирования является моделирование на ЭВМ как проектируе-

мых, так и участвующих в процессе проектирования объектов, представляемых в виде математических моделей. Математическая модель - система математических конструкций (чисел, переменных, матриц, множеств и т.д.) и отношений между ними, которые адекватно отражают существенные с инженерных позиций свойства моделируемого объекта или явления.

Среди свойств объекта, отражаемых в математической модели, различают свойства системы, элементов системы и внешней среды функционирования. Величины, определяющие количественные значения этих свойств, называют параметрами модели. Величины, характеризующие количественные свойства системы, элементов системы и внешней среды, называют соответственно выходными, внутренними и внешними параметрами. Очевидно, что свойства объекта зависят от внутренних и внешних параметров. Входные параметры разбивают на две группы: варьируемые, т.е. технические параметры проектируемой системы, и независимые (аргументы), к которым можно отнести входные воздействия и сигналы электронной аппаратуры.

Все наблюдаемые процессы, влияющие на технические системы, в самом общем виде можно разделить на детерминированные и случайные. К детерминированным относят процессы, которые могут быть описаны математическими соотношениями либо заданы таблично. Процессы, описывающие детерминированные явления, могут быть периодическими и непериодическими. В свою очередь, периодические процессы можно разделить на гармонические и полигармонические. К непериодическим относят почти периодические и переходные процессы.

Гармоническими называют периодические процессы, которые описывают функцией времени

$$x(t) = X \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t + \theta), \quad (2.1)$$

где X — амплитуда; f_0 — циклическая частота, измеряемая в циклах в единицу времени; θ — начальная фаза, измеряемая в радианах;

$x(t)$ — значение функции в момент времени t . Соотношение (1) можно представить графически в виде функции времени (рис.2.1) либо в амплитудно-частотном представлении (в виде спектра) (рис.2.2).

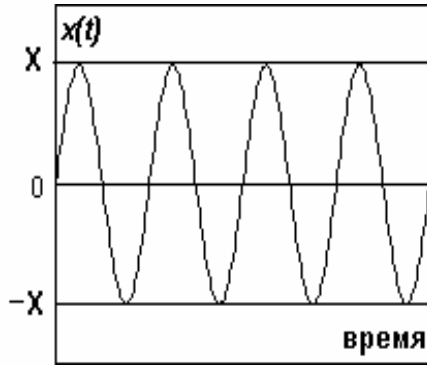


Рис. 2.1. Гармонический сигнал

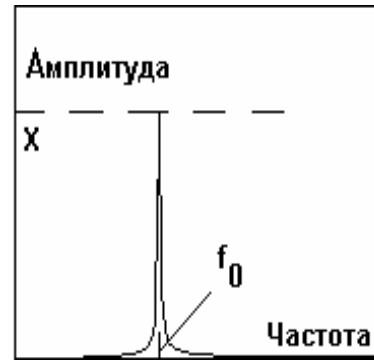


Рис. 2.2. Спектр сигнала

Процесс считают **полигармоническим**, если он точно повторяет свои значения через одинаковые интервалы времени, называемые периодом. Число периодов в единицу времени называют основной частотой f_1 . Особенностью полигармонического процесса является кратность всех составляющих его частот основной частоте f_1 :

$$x(t) = X_1 \sin(2\pi f_1 t + \theta_1) + X_2 \sin(4\pi f_1 t + \theta_2) + X_3 \sin(10\pi f_1 t + \theta_3). \quad (2.2)$$

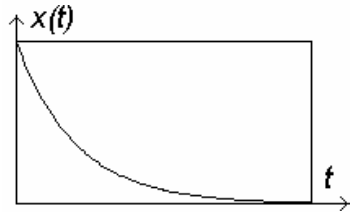
Спектр такого сигнала имеет ряд кратных составляющих: $f_1, 2f_1, 5f_1$. Если же отношения частот гармонических составляющих процесса не являются рациональными числами, процесс считают **почти периодическим**, например,

$$x(t) = X_1 \sin(2\pi f_1 t + \theta_1) + X_2 \sin(4\pi f_1 t + \theta_2) + X_3 \sin(\sqrt{10}\pi f_1 t + \theta_3). \quad (2.3)$$

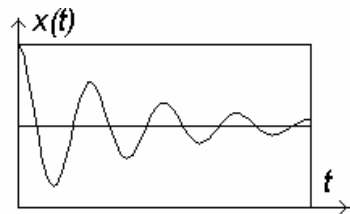
К **переходным** относятся все непериодические детерминированные процессы, например, показанные на рис.2.3. Важное отличие переходных процессов от периодических и почти периодических состоит в том, что их невозможно представить с помо-

щью дискретного спектра.

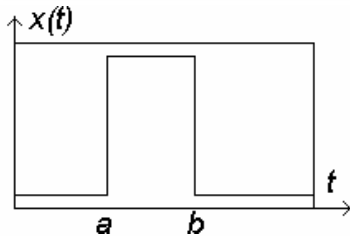
При моделировании непрерывных процессов на ЭВМ непрерывную функцию времени $x(t)$ представляют вектором (массивом)



$$\text{a) } x(t) = \begin{cases} A \cdot e^{-at}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$



$$\text{б) } x(t) = \begin{cases} A \cdot e^{-at} \cdot \cos(bt), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$



$$\text{в) } x(t) = \begin{cases} A, & a \leq t \leq b, \\ 0, & t < a, t > b. \end{cases}$$

Рис. 2.3. Примеры переходных процессов

ее дискретных отсчетов x_i (рис.2.4), взятых через равные промежутки времени Δt и определяющих (согласно теореме Котель-

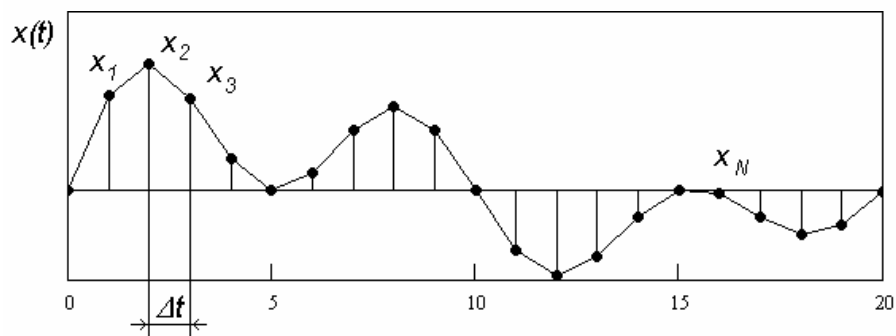


Рис. 2.4. Дискретное представление непрерывного процесса

никова) граничную частоту спектра сигнала, однозначно восстанавливаемую по отсчетам x_i :

$$F_{MAX} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t}. \quad (2.4)$$

Частота дискретизации при этом

$$f_D = 2 \cdot F_{MAX}. \quad (2.5)$$

Количество отсчетов N (объем выборки) связано с необходимым временем наблюдения T за процессом

$$N = \frac{T}{\Delta t}. \quad (2.6)$$

Для анализа спектрального состава процессов используют, как правило, процедуру быстрого преобразования Фурье (БПФ), реализующую преобразование Фурье для дискретных отсчетов процесса x_i

$$X(f) = \int_0^T x(t) \cdot \exp(-j 2\pi f \tau) d\tau.$$

Особенностью процедуры БПФ является требование к объему выборки (2.6) $N = 2^M$, где M — целое число, что в случае таблично заданных функций приводит к необходимости их интерполяции.

Одним из методов получения значений таблично заданной функции в промежуточных точках является метод Лагранжа. Суть метода заключается в вычислении значения функции $f(x)$ в точке $x^* \in [a, b]$ по значениям функции f_i в точках $x_i \in [a, b]$, $i = 1 \dots N$ как

$$f(x^*) = \sum_{j=1}^N \left[f_j \cdot \frac{\prod_{i \neq j=1}^N (x^* - x_i)}{\prod_{i \neq j=1}^N (x_j - x_i)} \right]. \quad (2.7)$$

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с правилами работы в системе MathCAD (см. прил. 1).

2. Для времени наблюдения $T=1\text{с}$ определить частоту дискретизации при объеме выборки 256 отсчетов, сформировать массив отсчетов времени и детерминированное воздействие вида (2.1) (гармонический сигнал) с частотой 25 Гц. Построить графики детерминированного воздействия и его спектра.

3. Построить полигармоническое воздействие (2.2) с частотами 25, 30 и 50 Гц, а также графики детерминированного воздействия и его спектра.

4. Сформировать непериодическое воздействие в виде прямоугольного импульса при $a = 0,3\text{с}$ и $b = 0,5\text{с}$ (см. рис. 2.3, в). Построить графики детерминированного воздействия и его спектра.

5. Сформировать табличное воздействие при $N=10$ в виде одного периода синусоиды. Построить его график. Используя интерполяционную формулу Лагранжа, получить $N=256$ отсчетов сигнала. Построить график и спектр.

6. Оформить отчет о лабораторной работе, который должен содержать графики моделируемых воздействий и их спектров.

Контрольные вопросы

1. Какие требования к переменным предъявляет система MathCAD?
2. Что такое ранжированные переменные и массивы?
3. Как осуществляется индексация элементов массива?
4. Как формируют матрицы в системе MathCAD?
5. Что такое данные файлового типа?
6. Перечислите арифметические операции системы MathCAD.
7. Что такое расширенные арифметические операции?
8. Перечислите некоторые встроенные элементарные функции системы MathCAD.
9. Назовите функции с условиями, функции сравнения и функции условных выражений.
10. Как задаются функции пользователя?
11. Какие операторы и функции работают с векторами и матрицами

в системе MathCAD?

12. Дайте определение функций прямого и обратного преобразования Фурье.

13. Как строят графики в системе MathCAD?

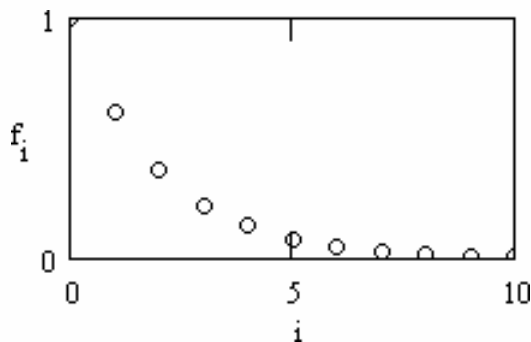
14. Назовите меню системы MathCAD?

15. Как рассчитать требуемую частоту дискретизации процесса?

16. Что такое интерполяция функций и как она выполняется?

Пример программы интерполяции таблично заданной функции

$$N := 10 \quad i := 0..N \quad x_i := \frac{i}{N} \quad f_i := \exp(-5 \cdot x_i) \quad j := 0..N$$



Интерполяционная
формула Лагранжа

$$F(p, k) := \prod_i \text{if}[i = k, 1, (p - x_i)]$$

$$S(d) := \sum_j f_j \frac{F(d, j)}{F(x_j, j)}$$

Рис.2.5. График таблично заданной функции

Расчет промежуточных точек функции

$$M := 100 \quad l := 0..M \quad xx_l := \frac{l}{M} \quad \tilde{f}_l := S(xx_l)$$

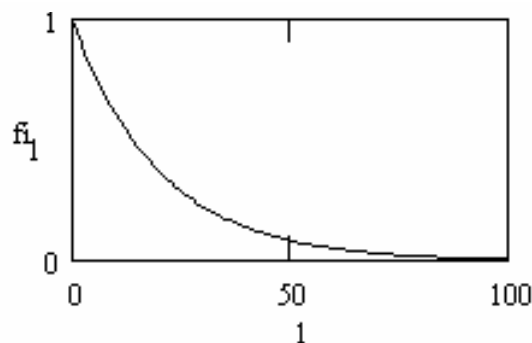


Рис. 2.6. Результаты расчета

Лабораторная работа N 3

Моделирование и исследование динамических объектов на АВК

Цель работы:

- изучить методологию аналогового моделирования динамических объектов на АВМ;
- получить практические навыки подготовки задач при моделировании;
- получить практические навыки исследования аналоговых моделей объектов.

Необходимые теоретические сведения

Динамический объект общего вида содержит линейные динамические части и нелинейные безынерционные элементы, соединенные между собой в соответствии с логикой построения объекта. Пример такого объекта показан на рис. 3.1.

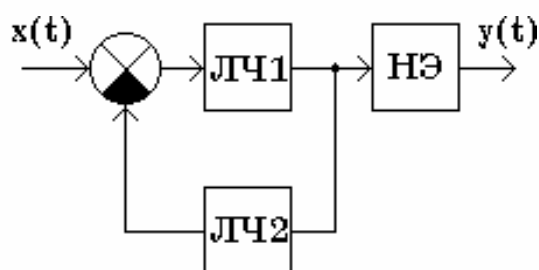


Рис. 3.1. Пример динамического объекта:
ЛЧ - линейная динамическая часть,
НЭ - нелинейный элемент

Если известны аналоговые модели отдельных частей, то применяют структурный метод моделирования (по структуре объекта), позволяющий получить модель, например, показанную на рис. 3.2.

Моделирование нелинейных безынерционных элементов приведено в предыдущей работе. Рассмотрим принципы моделирова-

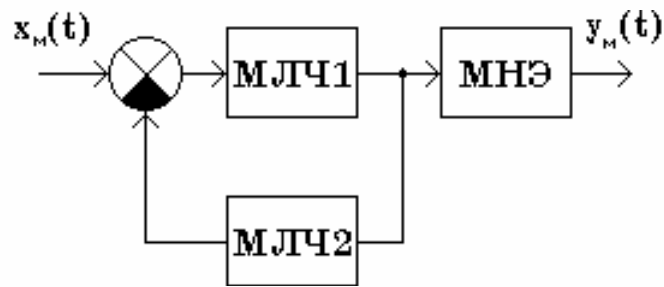


Рис. 3.2. Модель динамического объекта:
 МЛЧ, МНЭ - модели соответствующих
 частей;
 $x_m(t)$, $y_m(t)$ - модели входного воздей-
 ствия и выходной реакции

ния линейных динамических объектов, основанные на аппаратной реализации функции интегрирования. При этом линейный динамический объект с постоянными параметрами описывают либо дифференциальным уравнением

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j x^{(j)}(t), \quad (3.1)$$

либо соответствующей ему передаточной функцией

$$W(p) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (3.2)$$

Для физически осуществимых объектов $m \leq n$.

Основные методы аналогового моделирования линейных динамических объектов:

Метод моделирования по передаточной функции

Разделим в соотношении (3.2) числитель и знаменатель на старшую степень знаменателя, т. е. на p^n , а затем — на коэффициент знаменателя a_n . Получим

$$W(p) = \frac{C_0 p^{-n} + C_1 p^{1-n} + \dots + C_m p^{m-n}}{d_0 p^{-n} + d_1 p^{1-n} + \dots + 1}, \quad (3.3)$$

где $C_i = b_i/a_n$, $d_i = a_i/a_n$.

Преобразуем (3) к виду без знаменателя и выделим в явном виде $Y(p)$:

$$Y(p) = X(p) \sum_{j=0}^m C_j p^{j-n} - Y(p) \sum_{i=0}^{n-1} d_i p^{i-n}. \quad (3.4)$$

Поскольку символ p^{-k} означает k -кратное интегрирование, то используя выражение (3.4), составим структуру модели (рис. 3.3), называемую прямой формой аналогового фильтра (модели). Эта форма требует $2n$ интеграторов.

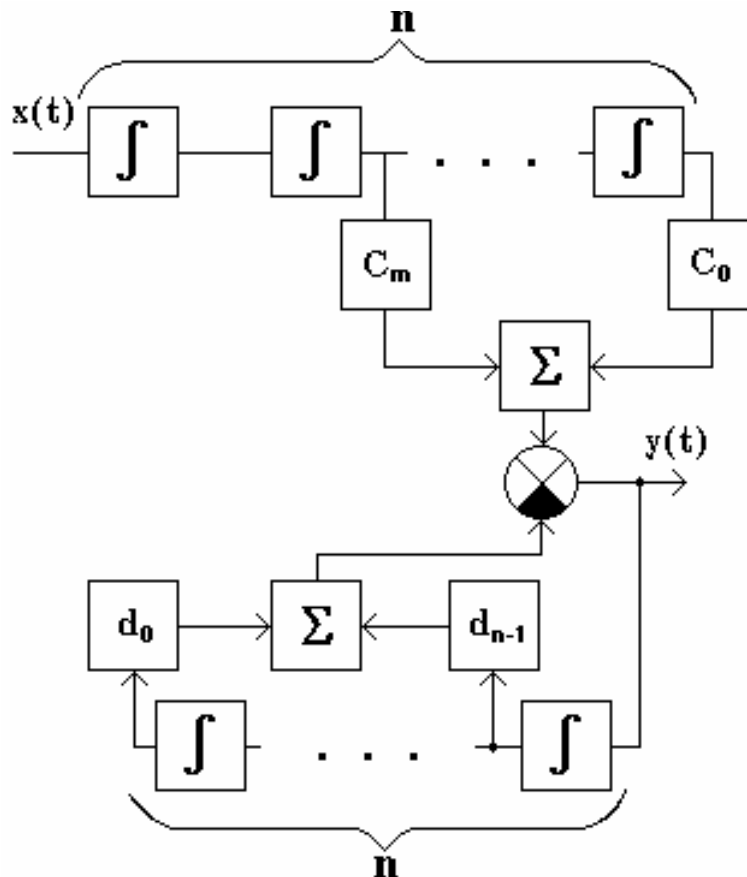


Рис. 3.3. Прямая форма модели

Метод введения промежуточной переменной

Соотношение (3.2) представим как

$$\frac{Y}{\sum b_j p^j} = \frac{X}{\sum a_i p^i} = z, \quad (3.5)$$

где z - вспомогательная переменная.

Из выражения (3.5) получим систему дифференциальных уравнений

$$Y = \sum_{j=0}^m b_j z^{(j)}, \quad (3.6)$$

$$X = \sum_{i=0}^n a_i z^{(i)}. \quad (3.7)$$

Из уравнения (3.7) выделим старшую производную $z^{(n)}$ переменной z :

$$z^{(n)} = \frac{1}{a_n} \left(X - \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^{(i)} \right). \quad (3.8)$$

Предположив сигнал $z(n)$ известным, путем n -кратного интегрирования получим все производные этого сигнала (в том числе и нулевую). На основе соотношения (3.8) можно синтезировать структуру генерирования по сигналу x производных $z(i)$ (см. нижнюю часть рис. 3.4).

Далее в соответствии с соотношением (3.6), выбрав требуемые производные $z^{(j)}$, сможем синтезировать структуру для получения сигнала $y(t)$ (см. верхнюю часть рис. 3.4).

Такую схему моделирования называют канонической. Она требует для реализации n интеграторов.

Последовательная каноническая структура моделирования

Структура образуется путем представления передаточной функции

$W(p)$ в виде произведения передаточных функций звеньев первого или второго порядков с заранее известными схемами набора моделей:

$$W(p) = \frac{k}{T_p + 1}, \quad W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}.$$

Итоговая модель представляет собой последовательное соединение моделей набора. Число интеграторов при этом также равно n .

Параллельная каноническая структура моделирования

Эта структура образуется путем разложения передаточной функции $W(p)$ на слагаемые первого или второго порядков и представления итоговой модели в виде параллельного соединения частных моделей с суммированием их выходных сигналов. Такая схема также требует n интеграторов.

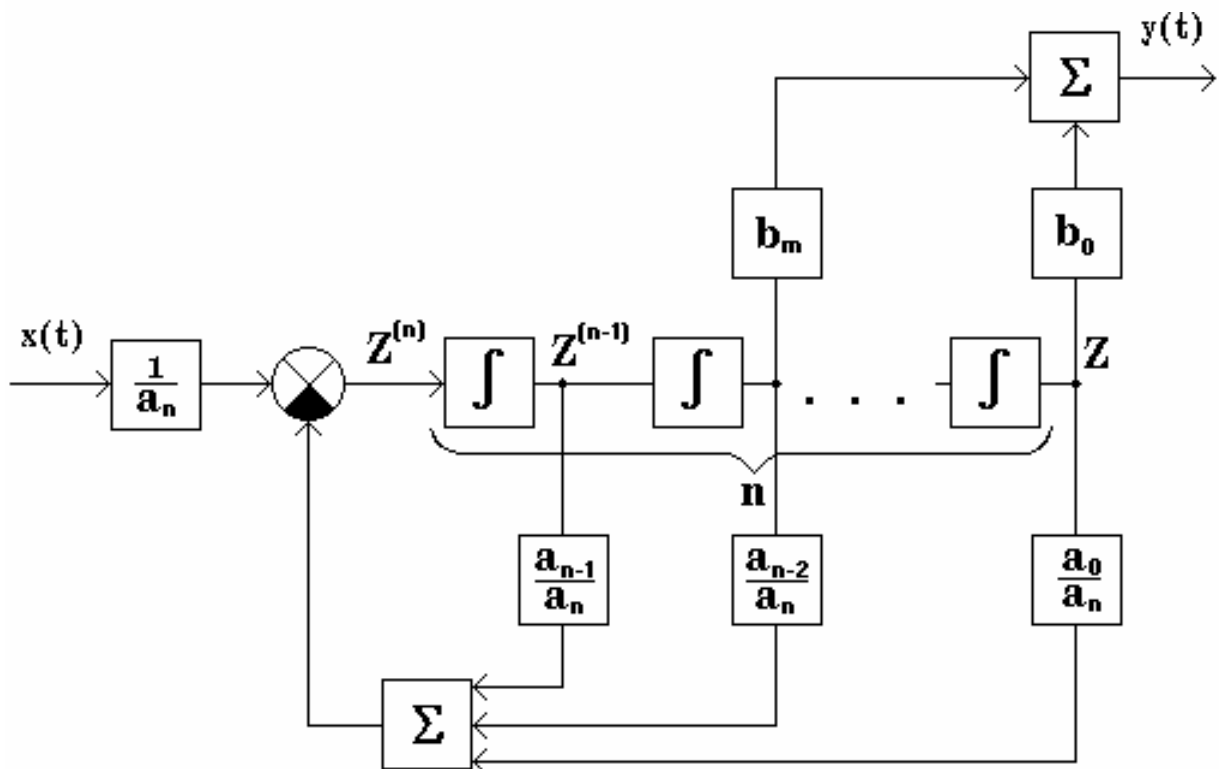


Рис. 3.4. Структура канонической модели

Масштабирование переменных при моделировании

При моделировании реальные переменные исследуемого объекта и внешние воздействия отображаются в АВМ напряжениями, которые называют машинными переменными. Соответствие между реальными и машинными переменными устанавливают с помощью масштабных коэффициентов, которые выбирают из условия

$$m_x \leq \frac{U_m}{|X_m|}, \quad (3.9)$$

где U_m — максимальное напряжение на выходе усилителей АВМ; $|X_m|$ — максимальное значение моделируемой переменной.

Масштабные коэффициенты — размерные величины.

Если требуется замедлить или ускорить процессы в модели по сравнению с процессами в реальной системе, то вводят масштабный коэффициент времени

$$m_t = \frac{t_m}{t}, \quad (3.10)$$

где t_m — машинное время.

Максимальные значения реальных переменных выбирают из условий задачи или путем приближенных вычислений. В результате первого решения задачи на модели более точно выясняют значения пределов изменения искомых величин. Для повышения точности может оказаться целесообразным изменить масштабы некоторых величин и повторить решение.

Уравнению (3.1) моделируемой системы соответствует по структуре машинное уравнение

$$\sum_{i=0}^n a_{mi} \frac{d^i U_y}{dt_m^i} = \sum_{j=0}^m b_{mj} \frac{d^j U_x}{dt_m^j}, \quad (3.11)$$

где a_{mi} , b_{mj} — машинные коэффициенты; U_y , U_x — машинные переменные соответствующие переменным x , y .

Значение коэффициентов a_{mi} , b_{mj} определяют из условия тождественности уравнений, для чего в выражение (3.1) подставляют значения

$$y = \frac{U_y}{m_y}, \quad x = \frac{U_x}{m_x}, \quad t = \frac{t_m}{m_t};$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i U_y \cdot m_t^i}{m_y \cdot dt_m^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j U_x \cdot m_t^j}{m_x \cdot dt_m^j}, \quad (3.12)$$

Сравнив уравнения (3.11) и (3.12), получим

$$a_{mi} = a_i \frac{m_t^i}{m_y}, \quad b_{mj} = b_j \frac{m_t^j}{m_x}. \quad (3.13)$$

С учетом масштабирования процедура моделирования системы включает в себя следующие этапы:

- 1) введение масштабов переменных;
- 2) определение машинных коэффициентов a_{mi} , b_{mj} ;
- 3) составление схемы набора с машинными коэффициентами;
- 4) исследование модели и получение $U_y(t_m)$;
- 5) переход к действительной переменной

$$y = \frac{U_y}{m_y}, \quad t = \frac{t_m}{m_t}.$$

Исследование моделей динамических систем

1. Построение переходной функции модели линейной системы

Построение осуществляют путем подачи на вход системы ступенчатого напряжения при предварительно нажатой кнопке "2" генератора (см. работу № 1).

Фазовые траектории можно наблюдать на экране индикатора.

Для исследования свободного движения из ненулевых начальных условий используют режим периодизации решений (нажата кнопка "2" генератора). Начальные условия задают с помощью соответствующих потенциометров интеграторов. Их вводят периодически в течение отрицательного полупериода прямоугольных импульсов.

Для исследования фазовых траекторий, производимых управляющими возмущениями, на вход модели подают сигналы от генератора. Если нажата кнопка "1" генератора, то фазовая траектория для очередного полупериода входного сигнала начнется из состояния, достигнутого системой при движении в течение предыдущего полупериода. Если нажата кнопка "2", — то движение явится реакцией на сигнал, соответствующий положительному полупериоду прямоугольных импульсов, а начальное состояние определится положением потенциометров, задающих начальные условия.

3 Исследование частотных характеристик

3.1. Схема исследования с использованием фигур Лиссажу показана на рис. 3.6, где М — модель системы. Режим интегрирования непрерывный — нажата кнопка "1" генератора. Используя

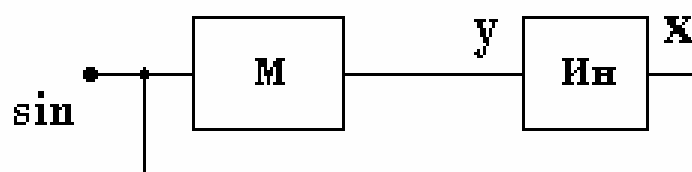


Рис. 3.6. Исследование с использованием фигур Лиссажу

коммутатор, одновременно с фигурой Лиссажу на экран индикатора необходимо вывести координатные оси и наклонную прямую $y=x$. Тогда при входном сигнале

$$x(t) = A \sin \omega t$$

параметры выходного сигнала

$$y(t) = B \sin [\omega t + \varphi]$$

для заданной частоты определяют по рис. 3.7 и из соотношений

$$\varphi = \arcsin \frac{a}{A} = \arcsin \frac{b}{B} \text{ — фаза;}$$

$$H = \frac{B}{A} \text{ — коэффициент передачи.}$$

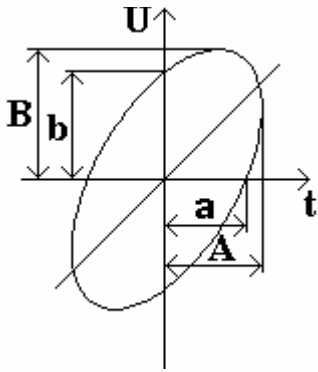


Рис.3.7. Определе-
ние параметров по
фигурам Лиссажу

3.2. Точность измерения фазового сдвига выходного сигнала $y(t) = B \sin [\omega t + \varphi]$ модели относительно входного можно повысить, применив схему, изображенную на рис. 3.8, без гашения обратного хода луча. Режим интегрирования — "1". Определение фазового сдвига показано на рис. 3.9. Для этого на экран индикатора необходимо вывести и оси

координат.

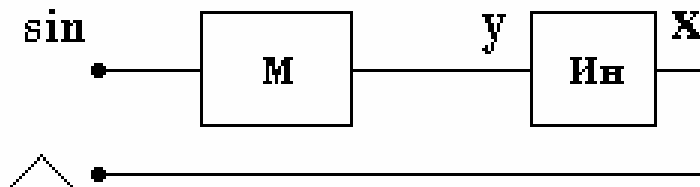


Рис. 3.8. Схема измерения фазового сдвига

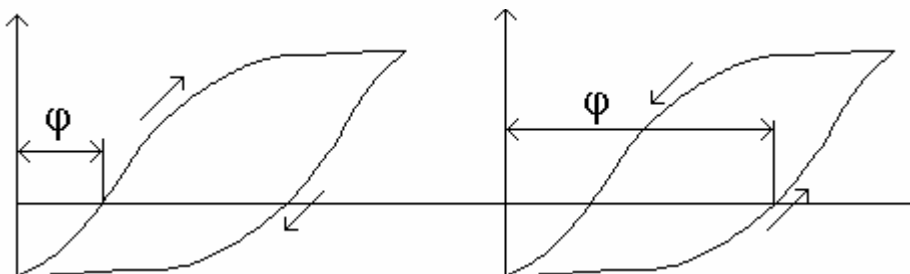


Рис. 3.9. Определение фазового сдвига

3.3. Исследование амплитудной и частотной характеристик мо-

дели можно осуществить, одновременно выводя с помощью коммутатора на экран индикатора входной синусоидальный сигнал $x(t) = A \sin \omega t$ и выходной $y(t) = B \sin [\omega t + \varphi]$ без гашения обратного хода луча (рис 3.10).

3.4. Измерение отклонения выходного сигнала модели от синусоидального выполняют по схеме, показанной на рис.3.11. Величину компенсирующего сигнала регулируют делителем напряжения "Д". Использование коммутатора позволяет наблюдать одновременно входной, выходной и разностный сигналы.

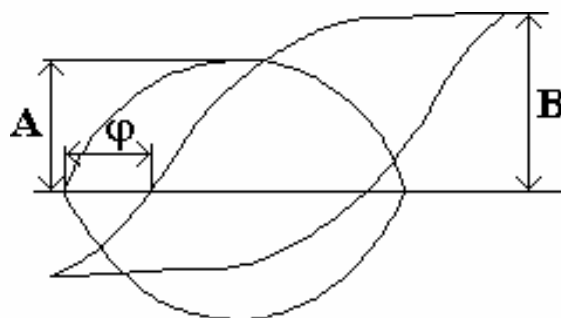


Рис. 3.10. Схема измерения частотных характеристик

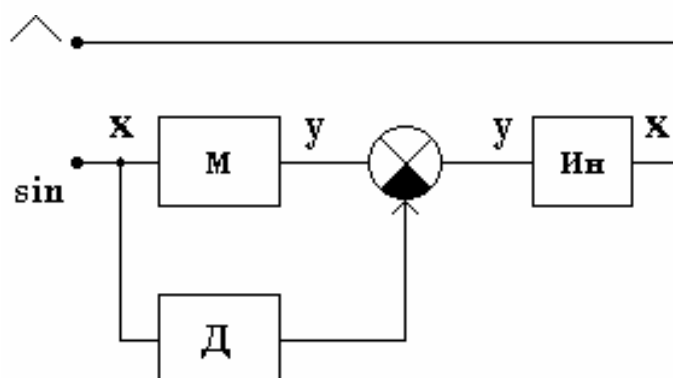


Рис. 3.11. Схема измерения отклонения выходного сигнала модели от синусоидального

Порядок выполнения работы

1. Составить каноническую схему аналогового моделирования для заданного варианта линейного динамического объекта (см. прил. 2).
2. Осуществить масштабирование переменных и определить параметры модели.
3. Выполнить моделирование и получить переходную характеристику модели.
4. Методами, изложенными в п.п. 3.1 — 3.3 определить ампли-

тудно-фазо-частотные характеристики для двух значений частоты входного сигнала.

5. В соответствии со схемой, изображенной на рис. 3.12, собрать модель нелинейной динамической системы. В качестве линейной динамической части принять модель (из п.3.1), а в качестве нелинейного безынерционного элемента — произвольную нелинейную модель из блока нелинейностей.

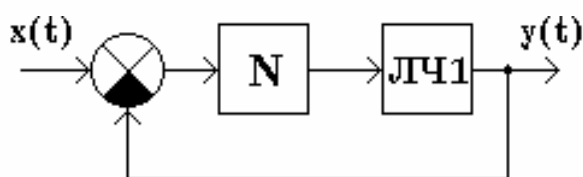


Рис. 3.12. Схема нелинейной динамической системы

6. Построить фазовые траектории в координатах (y, y') при различных начальных условиях и входных воздействиях с выводом на экран индикатора осей координат, фазовых координат и входного воздействия или начальных условий.

7. Построить схему измерения отклонения сигнала нелинейной модели от синусоидального в соответствии с п. 3.4 и измерить это отклонение.

8. Собрать схему по рис. 3.11 для измерения отклонения выходного сигнала от синусоидального при прохождении через нелинейную динамическую систему с выводом на экран индикатора прямого, компенсирующего и результирующего сигналов.

Содержание отчета

Отчет о лабораторной работе должен содержать:

1. Исходную математическую модель линейного динамического объекта в виде дифференциального уравнения или передаточной функции.
2. Результаты масштабирования и значения модельных коэффициентов.

3. Каноническую схему моделирования с указанием модельных параметров.
4. Переходную функцию модели.
5. Схему нелинейной модели объекта.
6. Результаты измерений фазовых траекторий и выводы по ним.
7. Схему и результаты измерения отклонения выходного сигнала нелинейной модели от синусоидального.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит сущность аналогового машинного моделирования?
2. Чем отличаются основные структуры аналогового моделирования?
3. Для чего осуществляют масштабирование при моделировании и как оно отражается на параметрах модели?
4. Как перейти от модельных переменных к реальным?
5. Как измерить амплитудную и фазовую характеристики модели на заданной частоте?
6. В чем состоит сущность метода фазового пространства?

Лабораторная работа N 4

Цифровое моделирование динамических объектов

Цель работы:

- изучить методику построения алгоритма цифрового моделирования линейного динамического объекта;
- изучить необходимые положения программы MathCAD для моделирования временных процессов и их динамических преобразований;
- получить навыки компьютерной реализации моделирования пре-

образования временных процессов динамическими объектами.

Необходимые теоретические сведения

Электронная аппаратура, ее конструкция и элементы, технологические процессы изготовления в подавляющем большинстве случаев являются динамическими системами, которые описывают в общем случае нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения вида:

$$F\{y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y^{(1)}, y, x^{(m)}, \dots, x^{(1)}, x, t\} = 0, \quad (4.1)$$

где $y(t)$, $x(t)$ — соответственно выходная реакция и входное воздействие на объект.

В соответствии с теоремой Котельникова временные функции $y(t)$, $x(t)$ можно заменить их дискретными отсчетами $y(t_i)$, $x(t_i)$. Сущностью цифрового моделирования объектов является установление взаимосвязи между $y(t_i)$ и $x(t_i)$, т.е. $y(t_i) = A\{x(t_i)\}$ и воспроизведение этой связи на ЭВМ или с помощью специализированного цифрового устройства.

В большинстве случаев удается осуществить декомпозицию объекта и представить его в виде структурной схемы (см. рис. 4. в лабораторной работе №1). Тогда цифровое моделирование сводится к последовательному цифровому моделированию преобразования сигнала по структурной схеме, что не вызывает принципиальных трудностей, если известны алгоритмы моделирования отдельных блоков.

Наиболее сложным при этом является цифровое моделирование линейных динамических объектов, описываемых либо дифференциальным уравнением

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j x^{(j)}(t), \quad (4.2)$$

либо эквивалентными ему передаточной функцией

$$W(p) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{Y(p)}{X(p)}, \quad (4.3)$$

или импульсной переходной характеристикой (реакцией объекта на воздействие δ -функции), определяемой как обратное преобразование Лапласа передаточной функции

$$\omega(t) = L^{-1}\{W(p)\}. \quad (4.4)$$

С использованием этих характеристик могут быть получены два основных алгоритма цифрового моделирования: прямой и рекуррентный.

Прямой алгоритм цифрового моделирования

Этот алгоритм основан на уравнении свертки, связывающем входной и выходной сигналы с импульсной переходной характеристикой

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau. \quad (4.5)$$

Для реальных физически осуществимых линейных систем функция $\omega(t)$ имеет двустороннее ограничение:

$\omega(t) \equiv 0$ при $t < 0$ (это условие всегда справедливо для физически осуществимых систем);

$\omega(t) \equiv 0$ при $t > T$ (функцию $\omega(t)$, неограниченную вправо, можно приближенно заменить ограниченной, если $\omega(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$).

С учетом этих ограничений уравнение свертки приобретает вид

$$y(t) = \int_0^T \omega(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau. \quad (4.6)$$

Пусть отсчеты входного и выходного сигналов взяты с одним

шагом Δt , и пусть Δt кратен величине T , т.е. $T/\Delta t=N$. Тогда дискретные значения выходного сигнала в моменты $t_i = i \cdot \Delta t$

$$y(t) = \int_0^T \omega(\tau) \cdot x(i \cdot \Delta t - \tau) d\tau. \quad (4.7)$$

При достаточно малом Δt интеграл можно заменить суммой по способу прямоугольников (замена подынтегральной функции ступенчатой кривой):

$$y(i) = \Delta t \cdot \sum_{j=0}^{N-1} \omega(j) \cdot x(i - j), \quad (4.8)$$

где $\omega(j)=\omega(j \cdot \Delta t)$ — дискретные значения импульсной переходной характеристики.

Выражение (4.8) представляет собой алгоритм скользящего весового суммирования входного процесса $x(i)$ с весовой функцией

$$a(i) = \Delta t \cdot \omega(i).$$

Если применить другие методы численного интегрирования в выражении (4.7) (например, трапеций или Симпсона), то весовой коэффициент изменится. В соответствии с уравнением (4.6) для задания прямого алгоритма необходимо знание импульсной переходной характеристики $\omega(t)$. Если известна передаточная функция объекта, то для нахождения $\omega(t)$ можно воспользоваться разложением передаточной функции на сумму слагаемых вида

$$\frac{A}{p^n}, \frac{B}{p+\alpha}, \frac{C}{(p+\alpha)^2}, \frac{D \cdot \beta}{p^2 + \beta^2},$$

$$\frac{E \cdot p}{p^2 + \beta^2}, \frac{F \cdot \beta}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}, \frac{G \cdot (p+\alpha)}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$$

и, воспользовавшись табл. 4.1, найти $\omega(t)$ в виде суммы соответствующих изображений.

Таблица 4.1

Преобразования Лапласа некоторых функций

$F(t)$	$F(p)$
T	$\frac{1}{p^2}$
$\frac{1}{(n-1)!} \cdot t^{n-1}$	$\frac{1}{p^n}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$
$\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
$\cos(\beta t)$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$
$e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$
$e^{-\alpha t} \cos(\beta t)$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$

Фильтровой метод цифрового моделирования

Этот метод является разновидностью прямого алгоритма цифрового моделирования и состоит в применении к выражению (4.7) преобразования Фурье:

$$F\{y(t)\} = F\{\omega(t)\} \cdot F\{x(t)\}. \quad (4.9)$$

Для существования преобразования Фурье функция $\omega(t)$ должна удовлетворять условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 0. \quad (4.10)$$

Если условие (4.10) выполняется, то

$$F\{\omega(t)\} = W(p) \big|_{p=j\omega}. \quad (4.11)$$

Таким образом, с учетом выражения (4.9) может быть разработан спектральный алгоритм цифрового моделирования, если вместо Фурье-преобразования использовать дискретное преобразование Фурье или его разновидность — быстрое дискретное преобразование Фурье: (БПФ — прямое, ОБПФ — обратное). Этот алгоритм содержит:

1) формирование массива значений дискретного спектра входного сигнала

$$X(l) = \text{БПФ}\{x(t)\};$$

2) формирование массива значений частотной характеристики

$$W(l) = W(il\Delta\omega);$$

3) перемножение массивов

$$Y(l) = W(l) \cdot X(l);$$

4) формирование массива значений выходного сигнала

$$y(i) = \text{ОБПФ}\{Y(l)\}.$$

Рекуррентный алгоритм цифрового моделирования

Этот алгоритм предполагает вычисление текущего отсчета выходной переменной $y(i)$ по предыдущим отсчетам этой и входной переменной

$$y(i) = A\{y(i-k), x(i-k)\}. \quad (4.12)$$

Рекуррентный алгоритм более экономичен относительно объема требуемой памяти ЭВМ и может быть составлен по дифференциальному уравнению объекта с применением конечных разностей

или же по передаточной функции объекта с применением метода z -преобразования. Последний более предпочтителен и использован в данной лабораторной работе.

Сущность этого метода заключается в следующем.

Произвольную временную функцию $x(t)$, представленную своими дискретными отсчетами $x(t_i)$, взятыми через постоянные интервалы времени $t_i = i \cdot \Delta t$, записывают в виде гребенчатой функции

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k \cdot \Delta t) \cdot \delta(t - k \cdot \Delta t), \quad (4.13)$$

где $\delta(t - k \cdot \Delta t)$ — δ -функция, смещенная в точку $k \cdot \Delta t$.

Преобразование Лапласа функции (4.13) имеет вид

$$X(p) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k \cdot \Delta t) \cdot e^{-pk \cdot \Delta t}. \quad (4.14)$$

После введения переменной $z = e^{-k \cdot \Delta t}$ формулу (4.14) представляют в виде

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k \cdot \Delta t) \cdot z^{-k}. \quad (4.15)$$

Выражение (4.15) является z -преобразованием временной функции $x(t)$, которое обладает следующими важными свойствами:

– линейности

$$Z\left\{\sum x_i\right\} = \sum Z\{x_i\};$$

– сдвига

если $X(z) = Z\{x(t)\}$, то для целых k

$$Z\{x(t - k\Delta t)\} = z^{-k} \cdot X(z).$$

Таким образом, сдвиг влево на k тактов дискретизации эквивалентен умножению z -преобразования на z^{-k} .

Методика составления рекуррентного алгоритма следующая:

- 1) в передаточной функции (4.3) числитель и знаменатель n делят на старшую степень p , т.е. на p^n , представляя $W(p)$ в виде

$$W(p) = \frac{b_0/p^n + b_1/p^{n-1} + \dots + b_m/p^{n-m}}{a_0/p^n + a_1/p^{n-1} + a_n};$$

2) оператор $1/p^k$ заменяют z-преобразованием из табл. 4.2.

Таблица 4.2
Z-преобразования оператора $1/p^k$

$\frac{1}{p^k}$	$Z\left\{\frac{1}{p^k}\right\}$
$\frac{1}{p}$	$\frac{z \cdot \Delta t}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	$\frac{z \cdot \Delta t^2}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{p^3}$	$\frac{z(1+z) \cdot \Delta t^3}{2(z-1)^3}$
$\frac{1}{p^4}$	$\frac{z(z+4z+z^2) \cdot \Delta t^4}{6(z-1)^4}$
$\frac{1}{p^5}$	$\frac{z(1+11z+11z^2+z^3) \cdot \Delta t^5}{24(z-1)^5}$

3) путем алгебраических преобразований (раскрытие скобок, приведение подобных) $W(z)$ представляют в виде

$$W(p) = \frac{C_m z^m + C_{m-1} z^{(m-1)} + \dots + C_0}{z^n + d_{n-1} z^{n-1} + \dots + d_0};$$

4) выполняя деление числителя и знаменателя на старшую степень z , т.е. на z^n , получают $W(z)$ в виде

$$W(z) = \frac{C_m z^{-(n-m)} + C_{m-1} z^{-(n-(m-1))} + \dots + C_0 z^{-n}}{1 + d_{n-1} z^{-1} + \dots + d_0 z^{-n}};$$

5) имея в виду, что $W(z) = Y(z)/X(z)$, записывают

$$Y(z) = X(z) \cdot [C_m z^{-(n-m)} + C_{m-1} z^{-(n-(m-1))} + \dots + C_0 z^{-n}] - Y(z) \cdot [d_{n-1} z^{-1} + \dots + d_0 z^{-n}];$$

6) используя свойство сдвига, находят

$$y(i) = C_m x(i - (n - m)) + C_{m-1} x(i - n + m - 1) + \dots + C_0 x(i - n) - d_{n-m} y(i - 1) - \dots - d_0 y(i - n).$$

Полученное выражение и представляет собой рекуррентный алгоритм моделирования;

7) для устранения отрицательных индексов в переменных $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ при переходе алгоритма на рекуррентный режим вычислений определяют

$$y(0) = 0;$$

$$y(1) = C_m x(0);$$

$$y(2) = C_m x(1) - C_{m-1} x(0) - d_{n-1} y(1);$$

8) окончательно оформляют алгоритм.

Порядок выполнения работы

1. Для выданного варианта объекта моделирования (см. прил. 2) привести передаточную функцию к типовому виду, рассчитав соответствующие коэффициенты по значениям элементов электрической модели.

2. Построить прямой алгоритм моделирования, для чего:

- разложить передаточную функцию на типовые слагаемые;
- по табл. 1 найти их изображения и определить $\omega(t)$;
- записать алгоритм в виде (4.8).

3. Построить фильтровой алгоритм цифрового моделирования. Для этого :

- проверить условие (4.10);
 - записать функцию $W(j\omega)$;
 - записать алгоритм моделирования в виде структурной схемы.
4. Построить рекуррентный алгоритм моделирования, для чего:
- используя табл. 4.2, получить выражение $W(z)$;
 - преобразовать $W(z)$ к форме с отрицательными степенями z ;
 - записать рекуррентную часть алгоритма;
 - определить значения $y(i)$ в переходном режиме.
5. Загрузить программу MathCAD командой ДОС `mcad <Enter>`.
6. Ввести исходные данные:
- параметры электрической модели объекта (R, L, C) ;
 - диапазон частот для анализа F ;
 - количество временных отсчетов N ;
 - количество отсчетов по частоте $M = N/2$;
 - шаг дискретизации по времени $\Delta t = \frac{1}{2 \cdot F}$;
 - шаг дискретизации по частоте $dF = \frac{F}{M}$.

Рассчитать параметры модели.

7. Ввести параметры циклов моделирования:
- $i = 0..N-1$ — по времени;
 - $l = 0..M-1$ — по частоте.
8. Ввести выражение импульсной переходной характеристики и построить ее график. Проверить условие (4.10).
9. Ввести программу формирования входного воздействия $x(t)$ в массиве x_i и построить его график. Убедиться в правильности формирования входного воздействия по его изображению на экране монитора ЭВМ.
10. Составить программу расчета выходной реакции $y(t)$ объекта по прямому методу в массиве y_i . Построить совмещенный график функций $x(t)$, $y(t)$.

11. Составить программу расчета выходной реакции $y(t)$ объекта по фильтровому методу, для чего:

- получить спектр входного воздействия методом БПФ, используя функцию $fft(x)$;
- рассчитать массив комплексных частот $p_l = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot dF \cdot l$;
- определить частотную характеристику объекта $W(j\omega)$ в массиве W_i ;
- получить спектр выходной реакции объекта в массиве G_i ;
- найти выходную реакцию $y(t)$ объекта как обратное преобразование Фурье от спектра, использовав функцию $ifft(G)$, в массиве y .

Построить совмещенный график функций $x(t)$ и $y(t)$.

12. Задать начальные условия $y_0=0$ и т.д. и реализовать рекуррентный алгоритм формирования выходной реакции объекта в массиве y_i .

13. Сравнить результаты моделирования, полученные различными методами.

14. Подготовить отчет о лабораторной работе.

Содержание отчета

Отчет о лабораторной работе должен содержать:

- 1 Передаточную функцию объекта в типовом виде.
- 2 Разложение передаточной функции на типовые слагаемые.
- 3 Выражение для импульсной переходной характеристики объекта.
- 4 Прямой алгоритм цифрового моделирования.
- 5 Результат проверки сходимости импульсной переходной характеристики.
- 6 Фильтровой алгоритм моделирования в виде структурной схемы.
- 7 Результат преобразования $W(p)$ в $W(z)$.
- 8 Представление $W(z)$ по отрицательным степеням z .
- 9 Рекуррентный алгоритм моделирования с начальными условиями.
- 10 Результаты моделирования динамической системы прямым,

фильтровым и рекуррентным методами (графики).

11 Выводы по результатам лабораторной работы.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит разница между прямым и рекуррентным алгоритмами моделирования?
2. В чем суть прямого цифрового метода моделирования?
3. В чем суть фильтрового метода моделирования?
4. В чем суть рекуррентного метода моделирования?
5. При каких условиях прямые методы моделирования неприменимы?

Лабораторная работа № 5

Методы цифрового статистического моделирования значений сигналов, воздействий и параметров

Цель работы:

- изучить методы цифрового статистического моделирования;
- получить практические навыки реализации алгоритмов цифрового статистического моделирования;
- закрепить знания о методах обработки данных статистического эксперимента.

Необходимые теоретические сведения

При разработке и проектировании электронных средств различного назначения и технологических процессов их производства приходится учитывать случайный характер параметров комплектующих электрорадиоэлементов (ЭРЭ), конструктивных размеров, входных сигналов, внешних воздействий и т. п. Определяющие

показатели объекта исследования при этом представляют в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= \phi_1(x_1, \dots, x_{n1}), \\ y_i &= \phi_i(x_1, \dots, x_{ni}), \\ y_m &= \phi_m(x_1, \dots, x_{nm}), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где y_i — определяющий показатель, x_i — случайные и детерминированные первичные параметры (параметры ЭРЭ, размеры, параметры входных сигналов и внешних воздействий и т.п.), $\phi_i(\circ)$ — функция взаимосвязи выходного параметра с первичным.

Анализ соотношений (5.1) показывает, что выходные параметры y_i также случайны и в общем случае статистически зависимы (как параметры, зависящие от одних и тех же случайных переменных). Наиболее полная характеристика выходных параметров — многомерный закон их распределения $f(y_1, y_2, \dots, y_m)$. Более частными характеристиками являются одномерные законы распределения $f(y_i)$. Еще более частными (и менее информативными) — числовые характеристики распределений: математическое ожидание, дисперсия, моменты более высоких порядков. Нахождение всех этих характеристик чисто аналитическим путем по известным законам распределений первичных параметров является крайне сложной задачей (за исключением некоторых частных случаев, например, когда параметры x имеют нормальное распределение, а функция $\phi_i(\circ)$ является их линейной формой $y_i = \sum a_i \cdot x_i$).

Решение задачи можно упростить путем проведения статистического имитационного эксперимента, при котором машинным путем имитируются реализации x_{ik} случайных первичных параметров x_i , по ним вычисляют в соответствии с соотношениями (5.1) реализации y_{ik} выходных параметров y_i . Статистическая обработка полученных массивов $\{y_{ik}\}$ позволяет определить требуемые статистические характеристики. Необходимо отметить, что при этом на вид функций (5.1) не накладывают никаких ограничений, что весьма критично при аналитическом решении задачи. Таким образом, основная трудность при статистическом моделировании состоит в

формировании реализаций случайных значений первичных параметров.

Имитация значений стандартной равномерно распределенной величины

Большинство алгоритмов моделирования реализаций случайных величин основано на функциональном преобразовании реализаций случайной величины r , равномерно распределенной в интервале $[0, 1]$. Такую величину называют стандартной, она подчиняется закону распределения (плотности)

$$f(r) = 1.$$

Для получения реализаций равномерно распределенных в интервале $[0, 1]$ случайных чисел можно применить мультипликативный алгоритм, состоящий в следующем:

- 1) задают исходное случайное число r_0 , нечетное, принадлежащее интервалу $[0, 1]$, не кратное 5, например, $r_0=0.376783$;
- 2) умножают r_0 на коэффициент K , например, $K = 37$;
- 3) в полученном значении выделяют дробную часть, которая и есть новое случайное число:

$$r_i = r_{i-1} \cdot 37 - \text{int}(r_{i-1} \cdot 37);$$

- 4) действия, изложенные в пп.2 и 3 повторяют N раз, где N — требуемое количество реализаций равномерно распределенного числа.

В различных системах программирования имеются стандартные процедуры (программы) генерации реализаций таких чисел. В используемой здесь системе MathCAD такой подпрограммой является $\text{rnd}(x)$ (см. прил. 1).

Имитация реализаций непрерывных случайных величин

Предположим, что имеется случайная величина x с законом распределения $f(x)$, $F(x)$ (плотность и функция распределения соот-

ветственно). Случайная величина x трансформируется в величину y посредством непрерывного преобразования $y=\phi(x)$.

Случайная величина y характеризуется законом распределения $f(y)$. В силу непрерывности преобразования $f(x)$ соблюдаются соотношения

$$P\{x_i < x\} = P\{y_i < y\} \text{ или } F(x) = F(y),$$

где x_i, y_i - реализации величин x и y , при этом $y_i = \phi(x_i)$, или

$$\int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^y f(y) dy. \quad (5.2)$$

Пусть x — есть стандартная величина r . Тогда из соотношения (5.2) получаем

$$r = \int_{-\infty}^y f(y) dy. \quad (5.3)$$

Решение уравнения (5.3) относительно y приводит к необходимой функции преобразования $\phi(\circ)$ для получения из реализаций r_i стандартной случайной величины r реализаций y_i случайной величины y с требуемым законом распределения $f(y)$. Уравнение (5.3) можно записать так же как

$$r = F(y), \quad (5.4)$$

а его решение — как

$$y = F^{-1}(r), \quad (5.5)$$

где F^{-1} — функция, обратная F .

Для равномерного в интервале $[a, b]$ распределения случайной величины алгоритм формирования реализаций

$$y_i = (b-a) \cdot r_i + a, \quad (5.6)$$

а для экспоненциального распределения $f(y) = \lambda \cdot e^{-\lambda y}$

$$y_i = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(r_i). \quad (5.7)$$

К сожалению, не во всех законах распределения существует явная обратная функция $F^{-1}(\cdot)$. В частности, это наблюдается при широко применяемом нормальном законе распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} = N(m, \sigma).$$

В этих случаях применяют другие методы формирования реализаций, основанные на частных свойствах распределения. Одним из них при нормальном распределении есть свойство нормализации суммы достаточно большого числа произвольно распределенных слагаемых ("центральная предельная теорема"). С учетом этого свойства алгоритм формирования реализаций y_i с нормальным распределением из реализаций r_i стандартной величины строят следующим образом:

1) берут n независимых реализаций величины r :

$$\{r_j\} \quad j = \overline{1, n},$$

2) образуют сумму

$$z = \sum_{j=1}^n r_j,$$

которая распределена нормально и имеет параметры m_z , σ_z , где

$$m_z = \sum_{j=1}^n m_j, \quad \sigma_z = \left\{ \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \right\}^{-1/2}.$$

Так как для равномерного в интервале $[0, 1]$ распределения

$$m_r = 0,5; \quad \sigma_r = \frac{1}{\sqrt{12}},$$

$$m_z = n \cdot 0,5; \quad \sigma_z = \sqrt{\frac{n}{12}}.$$

3) центрируют и нормируют величину z , сводя ее к стандартной

нормальной величине z_0 с распределением $N(0,1)$,

$$z_0 = \frac{z - m_z}{\sigma_z}.$$

4) величину z_0 преобразовывают в нормально распределенную случайную величину y с распределением $N(m, \sigma)$

$$y = m + \sigma \cdot z_0. \quad (5.8)$$

5) окончательно записывают алгоритм формирования реализаций

$$y_i = m + \sigma \cdot \sqrt{\frac{12}{n}} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^n r_j - n \cdot 0,5 \right\}. \quad (5.9)$$

Этот алгоритм позволяет получить хорошее приближение к нормальному закону уже при $n \geq 10$. Известны более компактные алгоритмы, которые требуют формирования выборки $\{r_j\}$ с $n=5$.

Имитация реализаций дискретных случайных величин

Существуют параметры объектов исследования, которые являются реализациями дискретной случайной величины, которая принимает счетное множество дискретных значений x_k , $k = \overline{1, n}$ с заданными вероятностями p_k , причем

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1. \quad (5.10)$$

Алгоритм формирования реализаций такой величины строят по принципу обратной функции распределения (5.5) и сводят к следующему:

формируют реализацию r_1 ;

– если $r_1 < p_1$, то $y_1 = x_1$;

– если $r_1 < p_1 + p_2$, то $y_1 = x_2$;

– если $r_1 < \sum_{j=1}^k p_j$, то $y_1 = x_k$ и т.д.

Имитация реализаций векторного случайного параметра

Векторный случайный параметр \vec{x} имеет n комбинаций x_i и в общем случае характеризуется многомерным законом распределения $f(x_1, \dots, x_n)$. Наиболее распространенным случаем является многомерное нормальное распределение вектора, которое полностью характеризуется вектором математических ожиданий

$$\vec{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_n \end{bmatrix}$$

и корреляционной матрицей

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} \dots k_{1n} \\ k_{21} \dots k_{2n} \\ k_{n1} \dots k_{nn} \end{bmatrix},$$

где $k_{lm} = \sigma_l \cdot \sigma_m \cdot \rho_{lm}$,

σ_l и σ_m — среднеквадратические отклонения компонентов;

ρ_{lm} — коэффициент корреляции между i -й и j -й компонентами.

Известно, что линейное преобразование не изменяет нормальности вектора, изменяя лишь вектор математических ожиданий и корреляционную матрицу. Пусть исходный вектор \vec{x} имеет характеристики m_x, k_x и подвергается линейному преобразованию $A = [a_{lm}]$, $l, m = \overline{1, n}$. Тогда

$$\vec{y} = A \cdot \vec{x}, \vec{m}_y = A \cdot \vec{m}_x, k_y = A \cdot k_x \cdot A^T,$$

где T — символ транспонирования матрицы.

Соотношение (5.11) можно использовать для нахождения алгоритма формирования реализаций \vec{y}_i с заданным вектором математиче-

ских ожиданий \bar{m}_y и корреляционной матрицей K_y . Этот алгоритм содержит следующие операции:

1. Используя алгоритм (5.9), формируют n независимых (независимые обращения к датчику r) компонентов ξ_k с нулевым математическим ожиданием и единичными дисперсиями. В результате получают вектор $\vec{\xi}$ с корреляционной матрицей $K_\xi = I$ (единичная матрица).

2. Находят такое линейное преобразование A , которое трансформирует вектор $\vec{\xi}$ в вектор с заданной корреляционной матрицей

$$K_y = A \cdot K_\xi \cdot A^T = A \cdot A^T. \quad (5.12)$$

Если матрицу A выбрать треугольной, тогда

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} \cdot \xi_1, \\ y_2 &= a_{21} \cdot \xi_1 + a_{22} \cdot \xi_2, \\ y_n &= a_{n1} \cdot \xi_1 + \dots + a_{nn} \cdot \xi_n. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Элементы a_{ki} матрицы A находят из условий

$$M\{y_k y_i\} = K_{ki}, \quad M\{\xi_k \xi_l\} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (5.14)$$

$$M\{y_1^2\} = a_{11}^2 = K_{11},$$

$$M\{y_1 y_2\} = a_{11} a_{12} = K_{12},$$

$$M\{y_2^2\} = a_{21}^2 + a_{22}^2 = K_{22} \quad \text{и т.д.};$$

откуда получают

$$a_{11} = \sqrt{k_{11}}, \quad a_{21} = \frac{k_{12}}{\sqrt{k_{11}}}, \quad a_{22} = \sqrt{k_{22} - \frac{k_{12}^2}{k_{11}}} \quad \text{и т.д.} \quad (5.15)$$

3. Записывают реализацию \bar{y}_i вектора \vec{y} по реализации вектора $\vec{\xi}_i$:

$$\bar{y}_i = \bar{m}_y + A \cdot \vec{\xi}_i. \quad (5.16)$$

Статистическая обработка данных имитационного эксперимента

Для статистической обработки данных имитационного эксперимента применяют типовые алгоритмы статистического анализа наблюдений, основными из которых являются следующие:

1. Выборочное среднее значение

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i, \quad (5.17)$$

где N — число отсчетов, а x_i — значения отсчетов. Рассчитываемая таким образом величина является несмещенной оценкой истинного среднего значения.

2. Выборочное среднеквадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}. \quad (5.18)$$

Величина σ^2 является несмещенной оценкой дисперсии случайного процесса.

3. Гистограмма плотности распределения.

При объеме выборки N плотность распределения $f(x)$ можно оценить как $f(x) = \frac{N_X}{N_{\Delta X}}$, где ΔX — узкий интервал, симметричный относительно точки X ; N_X — количество попаданий в интервал ΔX .

При равномерном шаге ΔX одним из наиболее быстрых является адресный алгоритм построения гистограммы, состоящий из следующих этапов:

- для заданной выборки x_i , где $i = 1..N$, находят минимальное (MIN) и максимальное (MAX) значения;
- определяют шаг ΔX для заданного количества разбиений M гистограммы: $\Delta X = (MAX - MIN) / M$;
- для каждого значения x_i , где $i = 1..N$, определяют его положение

в гистограмме G : $K=(x_i-MIN)/\Delta X$ (K находится в интервале $[0..M]$);

– выполняют накопление гистограммы $G_k=G_k+1$; массив гистограммы G должен быть предварительно обнулен;

– оценивают плотность распределения

$$f_k = \frac{G_k}{N \cdot \Delta X}, \quad k = 0..M.$$

4. Поскольку функция распределения $F(x) = \int_{-\infty}^x f(z)dz$, то ее можно

оценить по результатам оценки плотности распределения:

$$F_k = \sum_{i=0}^k f_i, \quad k = 0..M.$$

5. Для проверки согласия теоретического и экспериментального распределений по критерию χ^2 необходимо вычислить гистограмму экспериментальной выборки $G(x)$ и теоретические значения плотности для предполагаемого закона распределения $f(x)$. После чего найти теоретические значения вероятностей попадания в интервалы гистограммы

$$P_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(z)dz, \quad k = 1..M,$$

где M — количество интервалов в гистограмме. Отклонение χ^2 может быть определено по формуле

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^M \frac{(N \cdot P_k - G_k)^2}{N \cdot P_k}, \quad (5.20)$$

где N — количество отсчетов в выборке $\{x_i\}$.

Вывод о непротиворечии эмпирического распределения (гистограммы) заданному теоретическому распределению делают на основе сравнения рассчитанного значения χ^2 с квантилем этого рас-

пределения $\chi^2_{\text{табл}}(\tau, P)$, приведенным в таблице. Квантиль распределения определяется заданной вероятностью P принятия правильного решения (о непротиворечии распределений) и числом степеней свободы τ , которое равно количеству разрядов гистограммы за вычетом количества независимых условий, наложенных на экспериментальные вероятности $f_k(x)$:

- 1) $\sum f_k = 1$ (это условие налагают всегда);
- 2) $\sum x_k \cdot f_k = m_x$ (если предъявляют требование соответствия среднего значения);
- 3) $\sum x_k^2 \cdot f_k = \sigma_x^2$ (если предъявляют требование соответствия дисперсии);

Если $\chi^2 < \chi^2_{\text{табл}}$, то теоретическое и эмпирическое распределения с вероятностью P не противоречат друг другу.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Ознакомиться с методами и алгоритмами формирования случайных величин, а также методами получения оценок их параметров.
2. Загрузить систему автоматизированных расчетов MathCAD.
3. Задать исходные данные для моделирования:
 - объем реализации $N := 200$,
 - количество разбиений в гистограмме $M := 10$.
4. Определить переменные для моделирования: $i := 1..N$; $j := 0..M$; $k := 0..M-1$.
5. Для равновероятного закона распределения задать границы a и b плотности распределения $f(z) = 1/(b-a)$.
6. Рассчитать точки разбиения гистограммы $w_j = (b-a) \cdot j / M + a$.
7. Построить график плотности вероятности равномерного закона (в точках w_k).

8. Построить график функции распределения равномерного закона.
9. С помощью алгоритма (5.6) сгенерировать выборку объемом 200 чисел, распределенных по равномерному закону, заполнить массив X .
10. Найти оценки среднего значения (5.17) и среднеквадратического отклонения (5.18).
11. Используя процедуру MathCAD $\text{Hist}(w,x)$, построить гистограмму G выборки x , график реализации x_i и гистограмму G .
12. Оценить вероятности попадания в интервалы гистограммы (5.19).
13. По критерию χ^2 (5.20) и таблице оценить степень соответствия теоретического и экспериментального законов распределения.
14. Выполнить для случая экспоненциального закона (5.7) пп.6-13. Можно принять параметр $\lambda = 1$. Для разбиения гистограммы использовать нижнее значение $a = 0$, верхнее значение $b = 6/\lambda$. Генерацию случайных чисел с экспоненциальным законом распределения осуществить методом обратной функции.
15. Выполнить для случая нормального закона распределения (5.3) пп. 6-13. Параметры $m = 1$, $\sigma = 2$. Для разбиения гистограммы использовать нижнее значение $a = m + 3 \cdot \sigma$, верхнее значение $b = m + 3 \cdot \sigma$. Генерацию случайных чисел с нормальным законом распределения осуществить методом центральной предельной теоремы (5.9) при $n = 6$.
16. Для заданного варианта дискретного распределения построить алгоритм имитации реализаций случайной величины в соответствии с «Имитацией реализаций дискретных случайных величин».
17. Выполнить генерацию 200 реализаций и оценить вероятности появления отдельных дискретных значений. Сравнить их с заданными вероятностями.
18. По заданным параметрам распределения двумерного нормального вектора в соответствии с «Имитацией реализации дискретных случайных величин» разработать алгоритм имитации его реализаций, используя векторные функции системы MathCAD (см.

прил.1).

19. Реализовать имитацию 200 реализаций двумерного вектора и, применив встроенные статистические функции (см. прил.1), получить статистические оценки средних значений и среднеквадратических отклонений компонентов вектора.

20. Получить оценку корреляционного момента

$$\hat{K}_{12} = \hat{K}_{21} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N [y_1(i) - m\hat{y}_1] \cdot [y_2(i) - m\hat{y}_2],$$

где $m\hat{y}_1$, $m\hat{y}_2$ — оценки средних компонентов двумерного вектора.

21. Результаты, полученные в п.19 и п.20, сравнить с заданными параметрами двумерного вектора.

22. Оформить отчет о лабораторной работе.

Таблица

Значения квантилей распределения

Число степеней свободы, τ	Значения χ^2 для вероятности P							
	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05
1	0.016	0.064	0.148	0.455	1.074	1.642	2.71	3.84
2	0.211	0.446	0.713	1.386	2.41	3.22	4.60	5.99
3	0.584	1.005	1.424	2.37	3.66	4.64	6.25	7.82
4	1.064	1.649	2.20	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49
5	1.610	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07
6	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.64	12.59
7	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07
8	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51
9	4.17	5.38	6.39	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92
10	4.86	6.18	7.27	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31
11	5.58	6.99	8.15	10.34	12.90	14.63	17.28	19.68

Таблица (окончание)

Число степеней свободы, τ	Значения χ^2 для вероятности P							
	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05
12	6.30	7.81	9.03	11.34	14.01	15.81	18.55	21.0
13	7.04	8.63	9.93	12.34	15.12	16.98	19.81	22.4
14	7.79	9.47	10.82	13.34	16.22	18.15	21.1	23.7
15	8.55	10.31	11.72	14.34	17.32	19.31	22.3	25.0
16	9.31	11.15	12.62	15.34	18.42	20.5	23.5	26.3
17	10.08	12.00	13.53	16.34	19.51	21.6	24.8	27.6
18	10.86	12.86	14.44	17.34	20.6	22.8	26.0	28.9
19	11.65	13.72	15.35	18.34	21.7	23.9	27.2	30.1
20	12.44	14.58	16.27	19.34	22.8	25.0	28.4	31.4
21	13.24	15.44	17.18	20.3	23.9	26.2	29.6	32.7
22	14.04	16.31	18.10	21.3	24.9	27.3	30.8	33.9
23	14.85	17.19	19.02	22.3	26.0	28.4	32.0	35.2
24	15.66	18.06	19.94	23.3	27.1	29.6	33.2	36.4
25	16.47	18.94	20.9	24.3	28.2	30.7	34.4	37.7
26	17.29	19.82	21.8	25.3	29.2	31.8	35.6	38.9
27	18.11	20.7	22.7	26.3	30.3	32.9	36.7	40.1
28	18.94	21.6	23.6	27.3	31.4	34.0	37.9	41.3
29	19.77	22.5	24.6	28.3	32.5	35.1	39.1	42.6
30	20.6	23.4	25.5	29.3	33.5	36.2	40.3	48.0

Содержание отчета

Отчет о лабораторной работе должен содержать:

– результаты моделирования и анализа для случаев равномерного, экспоненциального и нормального распределений. Пример ре-

зультатов изложен в прил.4;

– алгоритм имитации и реализации дискретной случайной величины. Результаты оценки вероятностей появления дискретных значений;

– алгоритм моделирования реализаций многомерного нормально-го вектора и статистической обработки данных моделирования. Результаты обработки данных моделирования.

Контрольные вопросы

1. Как получить алгоритм формирования случайных реализаций для равномерного и экспоненциального распределений (5.6), (5.7)?

2. Почему метод обратной функции неприемлем для формирования реализаций нормально распределенной случайной величины?

3. В чем состоит суть алгоритма формирования реализаций нормальной случайной величины на основе центральной предельной теоремы?

4. В чем состоит суть алгоритма имитации реализаций дискретной случайной величины?

5. Как статистически оценить вероятность появления отдельных значений дискретной случайной величины?

6. На каком свойстве основана имитация многомерного случайного вектора с заданной корреляционной матрицей?

7. В чем состоит суть проверки гипотезы о согласии эмпирического и теоретического распределений?

8. Какие вы знаете основные статистические функции системы MathCAD? В чем их суть?

Лабораторная работа № 6

Аналоговое моделирование детерминированных и случайных сигналов и воздействий

Цель работы

- изучить методику моделирования детерминированных и случайных сигналов на АВК.

Необходимые теоретические сведения

Моделирование детерминированных сигналов

При аналоговом моделировании сигналов и воздействий обычно оперируют функциями одной независимой переменной. Эти функции задают либо графически, либо в виде формульной зависимости $x = f(t)$. В последнем случае их можно рассматривать как результат решения дифференциальных уравнений. Отсюда следует общий метод синтеза на АВМ детерминированных сигналов и помех. Он состоит в построении дифференциального уравнения, решением которого при заданных начальных условиях является искомый процесс $x(t)$, и в реализации его на АВМ. Рассмотрим некоторые типовые примеры.

Пример 1. Моделирование экспоненциального сигнала

$$x(t) = k \cdot e^{\alpha \cdot t}.$$

Производная $dx/dt = -k \cdot \alpha \cdot \exp(-\alpha \cdot t)$, отсюда искомое дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha \cdot x.$$

Схема моделирования этого уравнения на АВМ показана на рис. 6.1. Здесь ключ K_1 определяет момент начала генерирования сигнала.

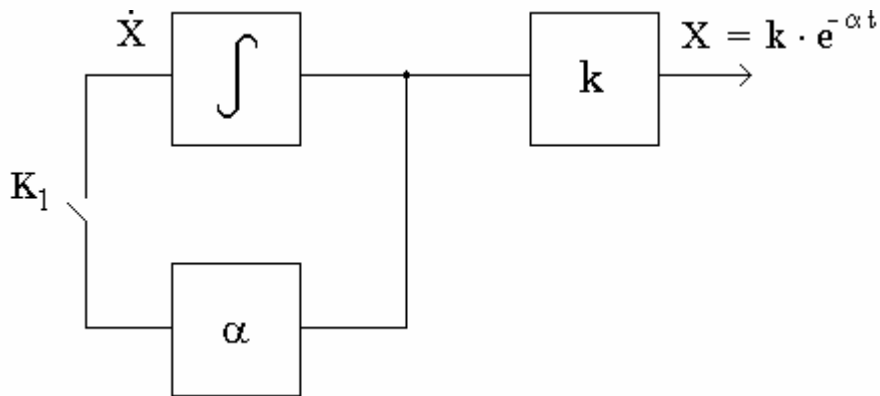


Рис. 6.1. Схема генерирования экспоненциального сигнала

Пример 2. Моделирование сигнала вида $x=1/(a+t)$, $(-a < t < \infty)$. Производная $dx/dt = -1/(a+t)^2$, отсюда дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} - x^2 = 0.$$

Схема моделирования показана на рис. 6.2.

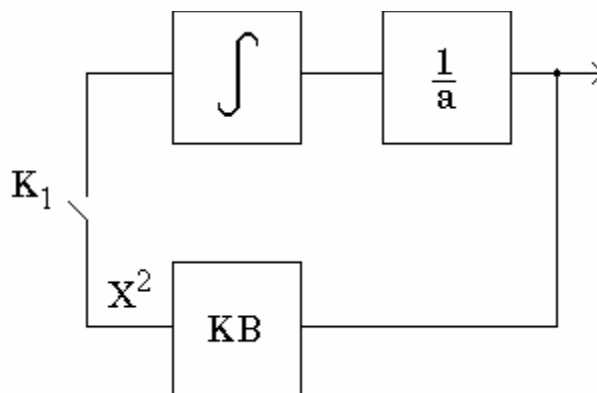


Рис. 6.2. Генерирование сигнала $1/(a+t)$

Пример 3. Моделирование полиномиального сигнала

$$x = \sum_{i=0}^n a_i \cdot t^i.$$

Для получения такого сигнала удобно применять цепочку интеграторов с последующим суммированием результатов (рис. 6.3). Рассмотренный способ формирования детерминированных сигнала-

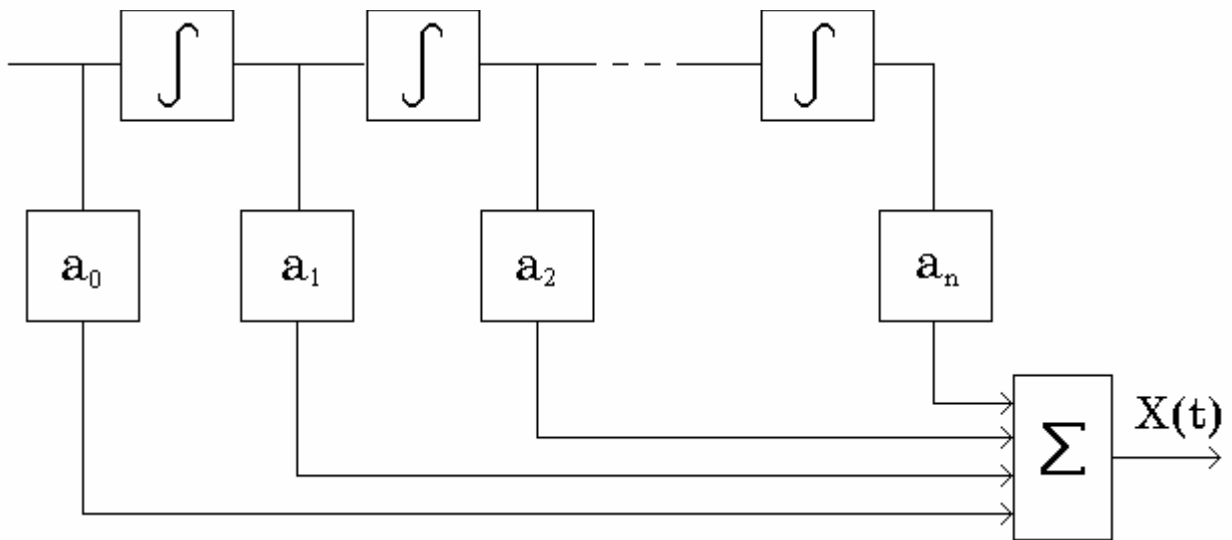


Рис.6.3. Схема генерирования полиномиального сигнала

лов с помощью решающих элементов АВМ является универсальным и почти всегда приводит к цели, даже при моделировании достаточно сложных колебаний. Для облегчения моделирования можно использовать справочники по дифференциальным уравнениям, в которых приведены уравнения и их решения.

Моделирование случайных сигналов

При аналоговом моделировании случайных сигналов и воздействий исходным является получаемый от специального генератора стандартный случайный процесс с заданными статистическими характеристиками. Обычно это белый шум с нормальным или равномерным распределением, нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Формирование случайного процесса с заданными статистическими характеристиками осуществляется преобразованием исходного белого шума. К ним относятся нелинейные безынерционные преобразования, позволяющие формировать случайные процессы с заданным законом распределения, а также линейная фильтрация, дающая возможность получать процессы с заданной корреляционной функцией и спектральной плотностью.

В более общем случае стационарные и нестационарные сигнала-

лы получают из решения стохастических дифференциальных уравнений с входным сигналом в виде "белого шума".

Формирование нормального стационарного случайного процесса с заданной корреляционной функцией

Предположим, что сигнал $x(t)$ имеет корреляционную функцию $R_x(\tau)$ и спектральную плотность $S_x(\omega)$, определяемую соотношением

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Необходимо найти структуру и параметры линейного фильтра, на выходе которого получим сигнал $y(t)$ с нормальным законом распределения и заданной спектральной плотностью $S_y(\omega)$.

Для этого воспользуемся соотношением

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) \cdot |K(j\omega)|^2 = S_x(\omega) \cdot K(j\omega) \cdot K(-j\omega),$$

по которому определим спектральную плотность процесса на выходе линейного фильтра с передаточной функцией $K(j\omega)$.

Пусть источник вырабатывает стационарный нормальный процесс со спектральной плотностью

$$S_x(\omega) = \frac{N_0}{T_1^2 \cdot \omega^2 + 1},$$

где N_0 — значение спектральной плотности при $\omega=0$. Необходимо найти структуру линейного фильтра, на выходе которого получится нормальный процесс $y(t)$ со спектральной плотностью

$$S_y(\omega) = \frac{N_0}{(T_2^2 \cdot \omega^2 + 1) \cdot (T_3^2 \cdot \omega^2 + 1)}.$$

С учетом этого

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{S_y(\omega)}{S_x(\omega)} = \frac{T_1^2 \cdot \omega^2 + 1}{(T_2^2 \cdot \omega^2 + 1) \cdot (T_3^2 \cdot \omega^2 + 1)}.$$

Отсюда, используя метод факторизации, непосредственно получаем выражение комплексного коэффициента передачи фильтра

$$K(j\omega) = \frac{(T_1 \cdot j\omega + 1)}{(T_2 \cdot j\omega + 1) \cdot (T_3 \cdot j\omega + 1)}.$$

Заменяя $j\omega = p$, находим передаточную функцию линейного фильтра

$$K(p) = \frac{(T_1 \cdot p + 1)}{(T_2 \cdot p + 1) \cdot (T_3 \cdot p + 1)}.$$

По передаточной функции известным путем (см. лаб. работу № 4) строим структуру аналогового формирующего фильтра. Если исходный процесс $x(t)$ является "белым шумом" с $S_x(\omega) = N_0$, то структуру формирующего фильтра определяем из передаточной функции

$$K(p) = \frac{1}{(T_2 \cdot p + 1) \cdot (T_3 \cdot p + 1)}.$$

Оценка статистических характеристик

При аналоговом моделировании для измерения статистических характеристик можно использовать стандартные блоки АВМ.

Оценка математического ожидания стационарного случайного процесса

$$\hat{m}_x = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) dt.$$

Схема, соответствующая этой формуле, показана на рис. 6.4.

В момент $t = 0$ ключ Кл размыкается и начинается процесс усреднения. В момент $t = T$ происходит считывание показаний прибора и ключ Кл замыкается. Рассмотренный метод неудобен, так как требует коммутации в схеме через фиксированные интервалы времени.

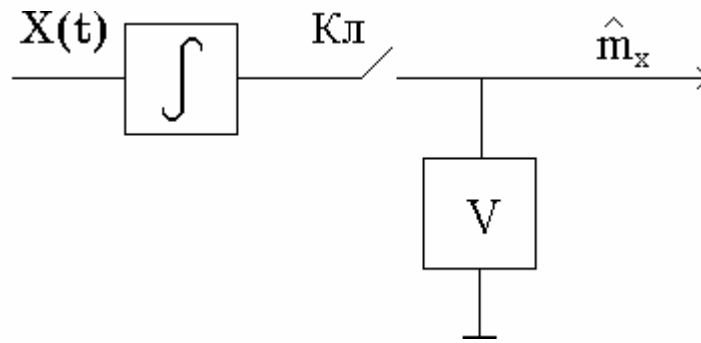


Рис. 6.4. Схема измерения математического ожидания

От указанного недостатка свободен метод усредняющего фильтра. Его передаточная функция

$$K(p) = \frac{1}{T_0 \cdot p + 1}.$$

Если $T \gg T_0$ (реально $T = (5 \dots 10) \cdot T_0$), то оценка \hat{m}_x осуществляется практически непрерывно и необходимость в ключе отпадает.

Аналогично строят аналоговые схемы для измерения дисперсии и других характеристик.

Генератор нормального шума

Такой генератор с управляемым математическим ожиданием и дисперсией выполнен на основе шумящего полупроводникового стабилитрона и обеспечивает постоянную спектральную плотность нормального шума в диапазоне 0...100 Гц. Параметры шума регулируются соответствующими регуляторами. Генератор конструктивно размещен в служебном блоке АВК ниже ЭЛТ. Клемма выхода генератора расположена справа от ручки регулировки амплитуды прямоугольных импульсов.

Порядок выполнения работы

1. На АВК собрать схемы (см. рис. 6.1 – 6.3) и убедиться в правильном генерировании соответствующих сигналов.
2. Используя сигнал генератора нормального шума, записать на

самописец его реализацию и построить гистограмму распределения.

3. Собрать указанную преподавателем нелинейность. Пропустить через нее сигнал генератора нормального шума. Записать на самописец реализацию и построить ее гистограмму распределения.

4. Построить и реализовать схему формирования случайного сигнала с заданной спектральной плотностью.

5. Построить схему измерения математического ожидания по схеме усредняющего фильтра. Задавшись математическим ожиданием нормального шума, измерить его с помощью построенной схемы.

6. Оформить отчет о лабораторной работе.

Содержание отчета

Отчет о лабораторной работе должен содержать:

- схемы генерирования на АВК детерминированных сигналов и их вид;
- гистограмму распределения нормального шума;
- гистограмму распределения шума, преобразованного нелинейностью;
- схему измерения математического ожидания и результат измерения.

Контрольные вопросы

1. На чем основан принцип формирования детерминированных сигналов на АВМ?
2. Как построить схему формирования на АВМ синусоидального сигнала?
3. На чем основан принцип формирования случайных сигналов с заданной корреляционной функцией?

Лабораторная работа № 7

"Исследование моделей внезапного и деградационного отказов"

Цель работы:

- изучить основные модели отказов, числовые характеристики безотказности и их статистические оценки;
- изучить методику и получить навыки машинного моделирования отказов;
- получить навыки статистической обработки данных об отказах.

Необходимые теоретические сведения

Условия работоспособности (отказа) любого элемента можно представить в виде соотношений:

$$Q < R, \quad (7.1)$$

$$x_d < x, \quad (7.2)$$

где соотношение (7.1) соответствует условию отказа по схеме "нагрузка — прочность"; а (7.2) — параметрическому условию отказа;

Q — обобщенная прочность (тепловая, механическая, электрическая и т.п.);

R — обобщенная нагрузка;

x — значение определяющего параметра;

x_d — его допустимое значение.

Параметры Q , R , x в выражениях (7.1), (7.2) могут быть случайными величинами или процессами. Их свойства определяют модели внезапных, постепенных и деградационных отказов.

Модель внезапного отказа

Отказ называется внезапным, если его невозможно предусмотреть предварительными исследованиями или техническим осмотром. Математически условие внезапного отказа, соответствующее

условиям (7.1), (7.2), представляют в виде

$$x(t) > x_d, \quad (7.3)$$

где $x(t)$ - нормальный стационарный случайный процесс нагружения или изменения определяющего параметра, x_d — постоянное допустимое значение прочности или определяющего параметра.

При таком условии моделью отказа является пересечение уровня x_d первым выбросом процесса $x(t)$. Последовательность моментов пересечений образует поток случайных событий. Если уровень x_d существенно превышает математическое ожидание \bar{x} процесса $x(t)$ так, что выбросы носят редкий характер, то поток называют простейшим. Он обладает следующими свойствами:

1) стационарностью — вероятность появления определенного числа γ событий в интервале $(t, t + \tau)$ зависит только от τ , а не от t ;

2) ординарностью — вероятность возникновения на элементарном участке Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью возникновения одного события;

3) отсутствием последействия — для любых неперекрывающихся временных участков число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие.

Для простейшего потока событий вероятность появления ровно k событий за время t определяется законом Пуассона

$$P_k(t) = \frac{(\bar{n}_x t)^k}{k!} e^{-\bar{n}_x t}, \quad (7.4)$$

где \bar{n}_x — среднее число пересечений уровня x_d в единицу времени.

Вероятность безотказной работы соответствует отсутствию пересечений за время t , т.е.

$$P(t) = P_0(t) = e^{-\bar{n}_x t}. \quad (7.5)$$

Этой вероятности соответствует плотность распределения времени до отказа

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (7.6)$$

или функция распределения

$$F(t) = 1 - P(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (7.7)$$

Модель деградационного отказа

Множество физико-химических процессов, протекающих в элементах, приводит к деградации их свойств, что вызывает изменение определяющего параметра элемента x по случайному нестационарному закону $x(t)$, подчиняющемуся стохастическому дифференциальному уравнению

$$dx(t) = a \cdot dt + b \cdot dn(t), \quad (7.8)$$

где a — средняя скорость изменения параметра;

b^2 — средняя скорость изменения дисперсии определяющего параметра;

$n(t)$ — гауссовский случайный процесс.

Время до пересечения уровня x процессом $x(t)$ (время до отказа) подчиняется закону распределения $f(t)$.

В зависимости от характера процесса деградации выделяют два вида закона распределения $f(t)$.

Для изделий электронной техники (ИЭТ) реализации процесса деградации могут иметь немонотонный характер, поэтому закон распределения имеет вид DN -распределения:

$$f(t) = \frac{1}{2bt\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(1-at)^2}{2b^2t}}. \quad (7.9)$$

Для механических изделий реализации процесса деградации носят монотонный характер (непрерывное накопление повреждений), поэтому закон распределения имеет вид DM -распределения:

$$f(t) = \frac{1+at}{2bt\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(1-at)^2}{2b^2t}}. \quad (7.9)$$

Деградационные отказы по возможности наблюдения процесса изменения параметра $x(t)$ могут быть как внезапными, так и постепенными.

Показатели безотказности

С плотностью распределения $f(t)$ времени до отказа связаны следующие показатели безотказности:

1) вероятность безотказной работы за время t

$$P(t) = \int_t^{\infty} f(t)dt = 1 - \int_0^t f(t)dt; \quad (7.11)$$

2) среднее время безотказной работы

$$T = \int_0^{\infty} tf(t)dt; \quad (7.12)$$

3) интенсивность отказов в момент времени t

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}. \quad (7.13)$$

Между характеристиками $f(t)$, $P(t)$, T , $\lambda(t)$ существуют другие соотношения, производные от выражений (7.10) — (7.13):

$$\begin{aligned} P(t) &= f'(t); & P(t) &= \exp\left\{-\int_0^t \lambda(t)dt\right\}; \\ T &= \int_0^{\infty} P(t)dt; & \lambda(t) &= -\frac{P'(t)}{P(t)}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Статистические оценки показателей безотказности

Если проведено наблюдение наработок до отказа n изделий $t_1, \dots, t_i, \dots, t_n$, то по значениям t_i могут быть получены точечные ста-

статистические оценки показателей безотказности:

1) плотности распределения времени до отказа в момент t

$$f^*(t) = \frac{r(t, t + \Delta t)}{n \cdot \Delta t}; \quad (7.15)$$

2) вероятности безотказной работы за время t

$$P^*(t) = 1 - \frac{r(t)}{n}; \quad (7.16)$$

3) среднего времени работы до отказа

$$T^* = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n}; \quad (7.17)$$

4) интенсивности отказов в момент времени t

$$\lambda^*(t) = \frac{r(t, t + \Delta t)}{[n - r(t)]\Delta t}. \quad (7.18)$$

В формулах (7.15) — (7.18) использованы следующие обозначения:

$r(t, t + \Delta t)$ — число отказов, зафиксированных в небольшом интервале $[t \dots t + \Delta t]$ (количество наработок t_i , попавших в этот интервал);
 $r(t)$ — общее число отказов, зафиксированных до момента t .

Постановка задачи лабораторной работы

В лабораторной работе необходимо:

1) выполнить аппаратное моделирование процессов возникновения внезапных и деградационных отказов и сформировать выборку данных о наработках до отказа $t_1, \dots, t_i \dots t_n$;

2) построить гистограммы распределений наработок по этим видам отказов и проверить гипотезу о приемлемости соответствующих распределений для их описания;

3) получить точечные оценки параметров распределений и по-

строить графики характеристик безотказности;

4) сравнить характеристики безотказности для различных видов отказов.

Описание лабораторной установки

Установка для моделирования отказов включает в себя три основных части:

1) генератор нормального случайного шума (ГШ) с управляемыми математическим ожиданием и дисперсией (конструктивно размещен в служебном блоке АВК ниже ЭЛТ, клемма выхода ГШ расположена справа от ручки регулировки амплитуды прямоугольных импульсов);

2) аналоговый вычислительный комплекс АВК-4 (АВК);

3) блок индикации отказов и наработок до отказа (ИО).

ГШ построен на основе усиления шума полупроводникового стабилитрона и обеспечивает постоянную спектральную плотность нормального шума в диапазоне 0...100 Гц. Параметры шума (математическое ожидание и дисперсия) регулируются соответствующими регуляторами в пределах -10...+10 В и 0...5 В соответственно.

АВК используют для одновременного наблюдения различных сигналов и формирования деградационного процесса $x(t)$ из нормального шума $n(t)$.

Блок ИО подсчитывает время до отказа (т.е. пересечения случайным сигналом $x(t)$ постоянного уровня 2,5 В) посредством трехзначного счетчика. Начало очередного наблюдения осуществляют нажатием кнопки "пуск". Остановка счета тактовых импульсов (времени до отказа) соответствует факту отказа. Если показания счетчика превысили число 999 он автоматически обнуляется и счет продолжается с нуля. При этом к окончательному числу необходимо добавить 1000.

Моделирование внезапных отказов

Для моделирования внезапных отказов следует собрать лабораторную установку по схеме, изображенной на рис. 7.1.

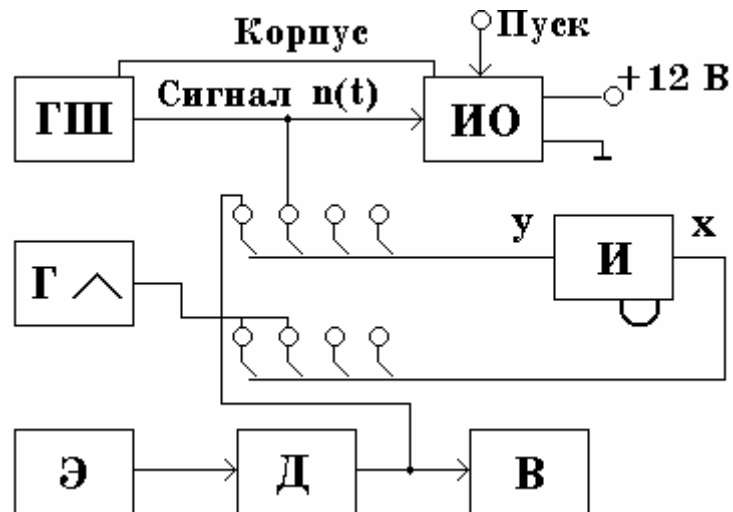


Рис. 7.1. Схема моделирования внезапных отказов

Индикатор АВК работает в режиме гашения обратного хода луча, его используют для одновременного наблюдения на экране ЭЛТ допустимого порога x_d и нормального случайного шума $x(t)$. Постоянный порог x_d устанавливается равным $2,5 В$ с помощью генератора эталонных напряжений (Э), а также делителя напряжений (Д) и контролируют по показаниям вольтметра (В). Генератор сигналов треугольной формы АВК используют для развертки напряжений x_d и $x(t)$.

Моделирование деградационных отказов

Деградационный отказ моделируют по тому же принципу, что и внезапный, за исключением процесса $x(t)$, который получают из решения уравнения (7.8) машинным путем на АВК. Схема для решения этого уравнения при немонотонной деградации показана на рис. 7.2.

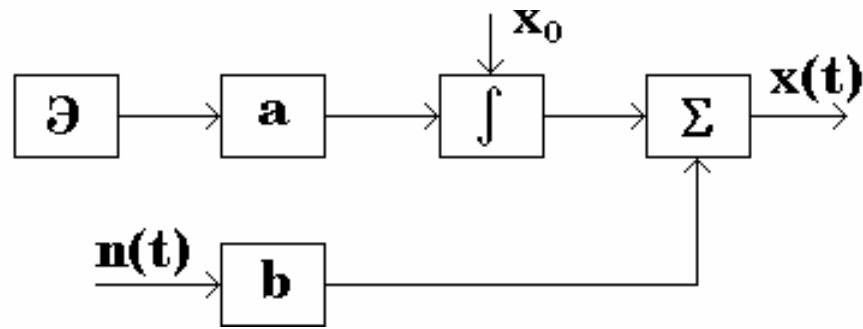


Рис. 7.2. Схема формирования деградационного процесса немонотонного типа

Схема для решения уравнения при монотонной деградации имеет вид, изображенный на рис. 7.3.

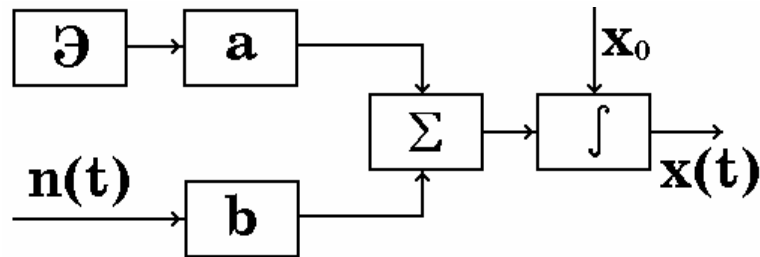


Рис. 7.3. Схема формирования деградационного процесса монотонного типа

Общая схема моделирования деградационных отказов, которая отличается от схемы моделирования внезапных отказов введением блока модели деградационного процесса (M), показана на рис. 7.4.

Порядок выполнения работы

1. Моделирование внезапных отказов.

Собрать схему моделирования внезапных отказов по рис.7.1.

Установить математическое ожидание и дисперсию шума так, чтобы пересечения уровня x носили редкий характер.

Смоделировать 50 отказов, фиксируя наработки до отказа t_i в протоколе работы.

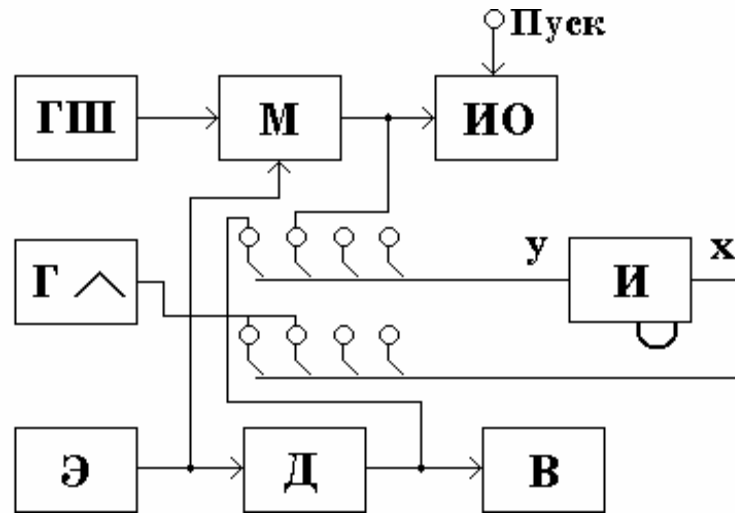


Рис 7.4. Схема моделирования деградационных отказов

2. Статистическая обработка данных наблюдений по внезапным отказам

Определить размах t_{max} ряда наблюдений наработок до отказа. Выбрать величину $t^* \geq t_{max}$ так, чтобы она была кратной 10 и найти величину интервала разбиения

$$\Delta t = \frac{t^*}{10}.$$

Подсчитать число попаданий n_i наработок до отказа в i -й интервал разбиения. Если число попаданий в какой-то интервал оказалось менее пяти, то соседние интервалы необходимо объединить, а интервал с большим числом n_i можно разделить на меньшие интервалы. После коррекции интервалов их характеристики (координаты середины t_{Ci} , начала и конца t_{in} , t_{ik}) и количество попаданий в них n_i необходимо занести в табл. 7.1.

Рассчитать эмпирическую вероятность попадания случайной наработки в i -й интервал

$$P_i^* = \frac{n_i}{n}.$$

Результаты расчетов занести в табл. 7.1.

Рассчитать оценку средней наработки T^* до отказа по формуле

$$T^* = \sum P_i^* t_{Ci},$$

либо

$$T^* = \frac{1}{n} \sum t_i.$$

Для расчета величины T^* можно воспользоваться стандартной программой.

Рассчитать оценку дисперсии D^* и среднеквадратического отклонения наработки δ^* до отказа

$$D^* = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (t_i - T^*)^2,$$

$$\sigma^* = \sqrt{D^*}.$$

Для расчета величин D^* , σ^* можно воспользоваться стандартной программой.

Рассчитать оценки значений вероятности безотказной работы $P(t_{ik})$ для моментов времени t_{ik} по уравнению

$$P^*(t_{ik}) = 1 - \frac{1}{1+n} \cdot \sum_{j=1}^l n_j.$$

Например, для t_{3k}

$$P^*(t_{3k}) = 1 - \frac{1}{1+n} \cdot (n_1 + n_2 + n_3).$$

Результаты расчетов занести в табл. 1.

Для моментов времени t_{in} рассчитать оценки $\lambda^*(t_{in})$ интенсивности отказов:

$$\lambda^*(t_{iH}) = \frac{n_i}{[n - \sum_{j=0}^{i-1} n_j] \Delta t_i}.$$

Например, для t_{3H}

$$\lambda^*(t_{3H}) = \frac{n_3}{[n - (n_1 + n_2)] \Delta t_3}.$$

Величина $n - \sum_{j=0}^{i-1} n_j$ равна количеству неотказавших изделий к

началу j -го интервала.

Результаты расчетов занести в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Результаты обработки наблюдений внезапных отказов

Значения показателей	Интервалы				
	1	2	I		10
Середина интервала	t_{c1}	t_{c2}	t_{ci}		t_{c10}
Координаты начала и конца			$\frac{t_{iH}}{t_{iK}}$		
Количество попаданий	n_1	n_2	n_i		n_{10}
P_i^*	P_1^*	P_2^*	P_i^*	P_i^*	P_{10}^*
$P(t_{ik})$	P_1	P_2	P_i		P_{10}
$\lambda(t_{iy})$	λ_1	λ_2	λ_i		λ_{10}

3. Построение графиков показателей надежности

Построить гистограмму распределения наработки до отказа в виде ступенчатой фигуры вида, показанного на рис. 7.5.

Построить кривую

$$f(t_i) = \frac{1}{T^*} e^{-\frac{t_i}{T^*}}.$$

Для построения кривой можно воспользоваться значениями функции e^{-x} , приведенными в табл. 7.2, либо стандартной программой расчета.

Построить графики $P^*(t)$, $\lambda^*(t)$, $\lambda^* = 1/T^*$, совместив их с графиком $f(t_i)$.

Сделать качественные выводы о характере распределения наработки до отказа и о равенстве величин T и σ .

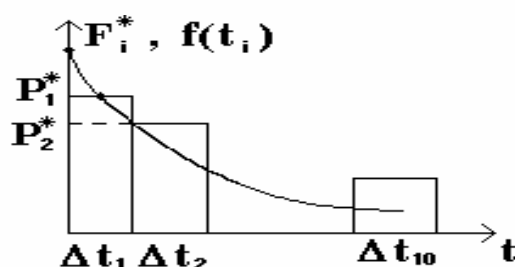


Рис.7.5. Вид гистограммы распределения

Таблица 7.2

Значения функции e^{-x}

	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	1.000	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407
1	0.368	0.333	0.301	0.273	0.247	0.223	0.202	0.183	0.165	0.150
2	0.135	0.122	0.111	0.100	0.091	0.082	0.074	0.067	0.061	0.055
3	0.050	0.045	0.041	0.037	0.033	0.030	0.027	0.025	0.022	0.020
4	0.018	0.017	0.015	0.014	0.012	0.011	0.010	0.009	0.008	0.007
5	0.007	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.004	0.003	0.003	0.003
6	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001

4. Проверка гипотезы о приемлемости экспоненциального распределения наработки

Рассчитать теоретическую вероятность P_i попадания случайной наработки в i -й интервал:

$$P_i = e^{-\frac{t_{iH}}{T^*}} - e^{-\frac{t_{iK}}{T^*}}.$$

Для расчета целесообразно воспользоваться табл. 7.2.

Величины P_i отложить в виде отличающихся ступеней на гистограмме распределения.

Рассчитать

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(n_i - nP_i)^2}{nP_i},$$

где $r = 10$ — количество интервалов гистограммы.

Для числа степеней свободы $k = r - 1 - L = 8$, где $L = 1$ — число параметров теоретического распределения, оцениваемых по той же выборке. При заданном уровне значимости $\alpha = 0.05$ квантиль χ^2 распределения равен 15.5.

Необходимо сравнить χ^2 с 15.5. Если $\chi^2 < 15.5$, то с вероятностью ошибки 0.05 это распределение приемлемо для описания распределения наработки. Если же $\chi^2 > 15.5$, то - неприемлемо.

Необходимо отметить, что критерий χ^2 применяют при числе интервалов $r > 15$. Поэтому вывод в данном случае не строго обоснован.

5. Моделирование деградационных отказов ИЭТ

Установить в схеме (рис.7.1) для шумового сигнала нулевое математическое ожидание и значение дисперсии меньшее чем в п. 1 (см. «Порядок выполнения работы»).

Собрать схему моделирования отказов по рис.7.2. и 7.4.

Смоделировать 50 отказов, зафиксировав наработки в протоколе.

6. Статистическая обработка данных наблюдений по деградиционным отказам ИЭТ

6.1. Разбить размах реализаций наработок до деградиционного отказа на десять интервалов, подсчитать числа попаданий реализаций в каждый интервал, оценить эмпирические вероятности попадания случайной реализации в каждый интервал P_i^* , среднюю наработку до отказа T^* , дисперсии наработки D^* и значения $P(t_{ик})$, $\lambda(t_{ин})$ в соответствии с п. 2. Заполнить таблицу, аналогичную табл. 7.1.

7. Построение и анализ графиков показателей надежности при немонотонной деградации

Аналогично п. 3.1 построить гистограмму распределения наработки до отказа.

Построить кривую плотности распределения

$$f(t_i) = \frac{1}{bt_i \sqrt{2\pi t_i}} e^{-\frac{(1-at_i)^2}{2b^2 t_i}}.$$

При построении кривой целесообразно воспользоваться табл.7.2 либо стандартной программой.

Вместо параметров распределения a , b подставить их статистические оценки

$$a^* = \frac{1}{T^*}, \quad b^* = \frac{\sigma^*}{\sqrt{a^*}}.$$

Построить графики зависимостей $P^*(t)$, $\lambda^*(t)$, совместив их с графиком $f(t)$.

Сделать выводы о характере изменения интенсивности отказов по сравнению с экспоненциальным распределением.

8. Моделирование деградационных отказов механических элементов

Собрать схему моделирования отказов с деградацией монотонного типа (см рис. 7.3, 7.4).

Смоделировать 50 отказов, зафиксировав наработки в протоколе.

В соответствии с п. 2 выполнить статистическую обработку данных наблюдений, заполнив таблицу результатов обработки (аналогичную таб. 7.1).

Построить кривую плотности распределения

$$f(t_i) = \frac{1 + at_i}{2bt_i\sqrt{2\pi t_i}} e^{-\frac{(1-at_i)^2}{2b^2 t_i}},$$

использовав табл. 2 либо специальную программу. Вместо параметров a , b подставить их статистические оценки

$$a^* = \frac{1}{T^*}, \quad b^* = \frac{\sigma^*}{\sqrt{a^*}}.$$

Построить графики зависимостей $P^*(t)$, $\lambda^*(t)$, совместив их с графиком $f(t)$.

Сравнить графики показателей надежности с аналогичными для двух предыдущих видов отказов.

9. Оформить отчет о лабораторной работе.

Содержание отчета

Отчет о лабораторной работе должен содержать:

- схемы моделирования отказов;
- протокол данных моделирования;
- таблицы с результатами обработки данных моделирования;
- соотношения для расчета основных характеристик;

- графики характеристик $f^*(t)$, $P^*(t)$, $\lambda^*(t)$, $f(t)$;
- выводы о работе.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит сущность основных моделей отказов?
2. Чем различаются внезапный, постепенный и деградационный отказы?
3. Что такое стационарность, ординарность и отсутствие последствия потока отказов?
4. Как можно определить значение интенсивности при внезапном отказе?
5. Чем по существу различаются два вида деградационных отказов?
6. Приведите соотношения для основных показателей безотказности.
7. Поясните сущность схем моделирования различных видов отказов.
8. Опишите последовательность проверки гипотезы о виде закона распределения.
9. Пользуясь графиком $P^*(t)$, докажите правильность оценки T^* .

Лабораторная работа № 8

Определение полей допусков на выходные параметры и элементы электронных средств (ЭС) методом статистического моделирования

Цель работы:

- изучить методику определения допуска на выходной параметр ЭС по допускам на первичные параметры;
- изучить методику применения цифрового статистического

- моделирования для определения допуска на выходной параметр ЭС и первичные параметры;
- получить навыки решения указанных задач с помощью программы MathCAD.

Необходимые теоретические сведения

На технологию производства ЭС (резисторов, конденсаторов, транзисторов и т.п.) влияют различные дестабилизирующие факторы, поэтому параметры комплектующих элементов имеют определенный разброс относительно номинального значения. Каждый конкретный образец устройства имеет конкретный набор элементов со случайными (в общем случае, отклонениями от номинальных значений). От образца к образцу значения параметров комплектующих элементов изменяются также случайным образом, что приводит к случайному изменению выходного параметра устройства. Для определения вероятности нахождения выходного параметра изделия в пределах поля допуска необходимо иметь N образцов устройства, каждый из которых будет обладать своим значением выходного параметра.

При определении допусков различают два вида задачи:

- а) определить допуск на выходной параметр по допускам на первичные (прямая задача);
- б) найти допуски на первичные параметры по допуску на выходной (обратная задача).

При расчете используют зависимость выходного (определяющего) параметра y ЭС от его первичных параметров x_i :

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (8.1)$$

Определяющий параметр y может быть коэффициентом усиления, коэффициентом нелинейных искажений, длительностью или фронтом формирующего импульса и т.п. Первичные параметры x_1, x_2, \dots, x_n представляют собой значения параметров резисторов, конденсаторов, транзисторов, микросхем и т.д., из которых ком-

плектуется ЭС (как правило, функциональный узел (ФУ)).

Зависимость (8.1) часто аналитически трудно определить, поэтому в этих случаях ее можно заменить соответствующей регрессионной зависимостью, получаемой на основе специально спланированного активного эксперимента (см. лаб. раб. № 10).

Допуски рассчитывают в предположении малости отклонения $\Delta x_i = x_i - x_{i0}$ первичных параметров от номинальных значений x_{i0} . Если предположить, что зависимость (8.1) непрерывна, отклонение выходного параметра можно представить как

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial y(\vec{x})}{\partial x_i} \right|_{\vec{x}_0} \cdot \Delta X_i = \sum_{i=1}^n \Delta_i \Delta X_i. \quad (8.2)$$

Выражение (8.2) после деления левой и правой частей на $y = y(\vec{x})$ при номинальных значениях x принимает вид

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial y(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{\Delta X_{i0}}{y(\vec{x})} \right|_{\vec{x}_0} \cdot \frac{\Delta X_i}{X_{i0}}. \quad (8.3)$$

или

$$\delta y = \sum_{i=1}^n K_{Bi} \cdot \Delta X_i, \quad (8.4)$$

где δy , δx_i — относительные отклонения выходного и первичного параметров соответственно;

$K_{Bi} \frac{\partial y(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{\Delta X_{i0}}{y(\vec{x})}$ — коэффициент влияния относительного отклонения первичного параметра x_i на относительное отклонение выходного параметра.

Прямая задача расчета допусков

Прямую задачу определения допуска на выходной параметр можно решить следующими методами.

1. Расчетный метод на «наихудший случай»

По заданным допускам на первичные параметры $[x_{i \min}, x_{i \max}]$ с учетом величины Δ_i определяют допуск на выходной параметр $[y_{\min}, y_{\max}]$. Метод не учитывает вероятностное распределение параметров x, y внутри допуска и приводит к очень широкому допуску на выходной параметр, что может быть неприемлемо по техническим соображениям.

2. Расчетный вероятностный метод

Этот метод учитывает статистический характер отклонений (погрешностей) первичных параметров $\Delta x_i, \delta x_i$. В большинстве случаев распределения величин $x_i, \Delta x_i, \delta x_i$ являются нормальными $N(m_i, \delta_i)$ с соответствующими математическим ожиданием m_i и среднеквадратическим отклонением δ_i . Параметры m_i, δ_i можно определить по абсолютному (Δ_i) или относительному (δ_i) допускам на первичные параметры. Относительный допуск часто задают в процентах. Например, для резистора с номинальным значением 100 Ом и симметричным допуском +10% получим такие величины:

- половина относительного допуска $\delta = 0.1$;
- половина абсолютного допуска $\Delta = 10$ Ом;
- поле допуска на параметр $[90, 110]$ Ом.

По правилу "трех сигм" можно определить среднеквадратические отклонения

$$\delta x_i = \delta \Delta x_i = \Delta_i / 3 = (m \Delta x_i \delta_i) / 3.$$

При отсутствии систематической погрешности (для симметричного допуска):

$$m x_i = x_{i0}, \quad m \Delta x_i = 0, \quad m x_i = 0.$$

С учетом соотношений (8.2) будем иметь:

$$m y = y(\bar{x}_0), \tag{8.6}$$

$$\delta y = \left[\sum A_i^2 \cdot \delta^2 y_i \right]^{1/2}. \quad (8.7)$$

В силу свойства композиции нормальных законов распределение выходного параметра y также будет нормальным со значениями m_y , δy . Зная поле допуска на выходной параметр $[y_{\min}, y_{\max}]$, находят вероятность нахождения выходного параметра в допуске (основную статистическую характеристику допуска) как

$$P\{y \in [y_{\min}, y_{\max}]\} = \Phi\left(\frac{y_{\max} - m_y}{\delta y}\right) - \Phi\left(\frac{y_{\min} - m_y}{\delta y}\right), \quad (8.8)$$

где $\Phi(\dots)$ — нормированная функция Лапласа.

Аналогично решают прямую задачу в более сложных случаях (несимметричные допуски, коррелированные параметры).

Основными недостатками указанного метода являются:

а) возможная неточность, связанная с линейным разложением функции (8.1);

б) законы распределения как первичных, так и выходного параметров в действительности могут отличаться от нормального и быть даже несимметричными.

3. Метод статистического моделирования (испытаний)

Этот метод основан на статистическом моделировании реализаций первичных параметров с требуемым законом распределения $f(x_i)$ и параметрами m_i , δ_i , совместном преобразовании реализаций в соответствии с функцией (8.1), статистической обработке последовательности получаемых значений выходного параметра. Статистическая обработка может включать в себя построение гистограммы распределения выходного параметра с установлением вида распределения и оценкой параметров, либо оценкой вероятности нахождения параметра в заданной области.

При статистическом моделировании значений первичных параметров мало влияющие параметры, у которых коэффициент

влияния существенно ниже основных (на два и более порядков), можно считать постоянными и равными их номинальным значениям.

Схема данного метода показана на рисунке. В ней учтено, что реализации моделируемых случайных величин получают из равномерно распределенных чисел в интервале $[0...1]$.

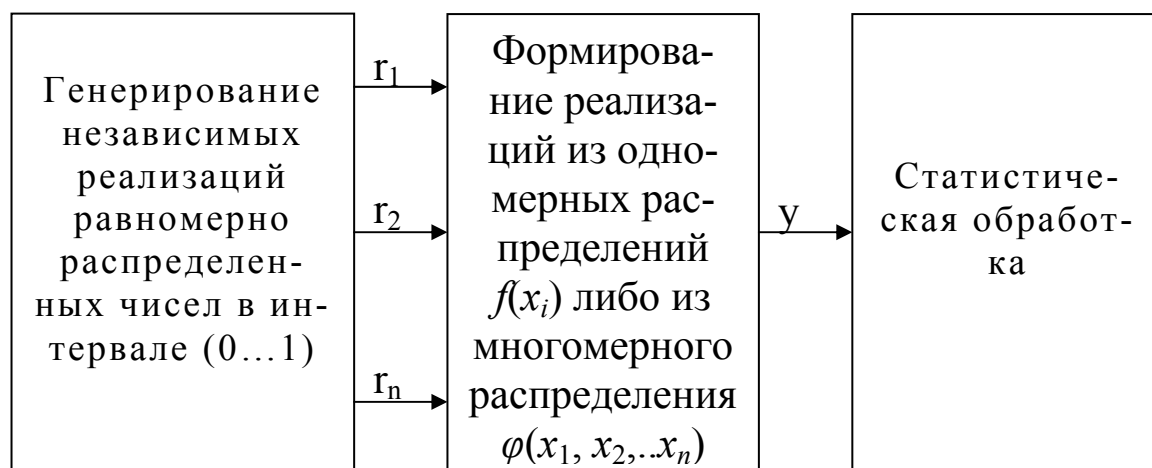


Рис. Схема статистического моделирования

Наиболее предпочтительной формой статистической обработки является графическое построение гистограммы распределения выходного параметра, размещение на ней установленного допуска и расчет вероятности попадания значений выходного параметра в допусковую область (соответствующая площадь гистограммы).

Преимуществом данного метода является учет действительных законов распределения первичных и выходного параметров и нелинейных особенностей функции (8.1).

Обратная задача расчета допусков

Эту задачу можно решить следующими основными методами.

1. Расчетный метод

По заданному допуску на выходной параметр определяют среднеквадратическое отклонение δ_y . На основе соотношения (8.7) составляют уравнение:

$$\delta^2 y = \sum_{i=1}^n A_i^2 \cdot \delta^2 y_i = \sum_{i=1}^n B_i, \quad (8.9)$$

где $A_i = \frac{\partial y(\bar{x}_0)}{\partial x_i}$.

Уравнение (8.9) не определено относительно неизвестных δy_i . Для его доопределения используют также различные методы. В частности, с каждой из составляющих общей погрешности B_i можно связать коэффициент весомости q_i (который можно определить экспертным путем). Выразив величины B_i , например, через B_1 , получают полностью определенную систему уравнений.

$$\delta^2 y = \sum_{i=1}^n B_i, \quad B_j = B_1 \cdot \frac{q_j}{q_1}, \quad j = \overline{2, n}.$$

Ее решение позволяет найти среднеквадратические отклонения всех первичных параметров, а значит, и допуски на них. Если вклады всех параметров в общую погрешность равноценны, то $q_i = 1/n$, а значит $B_j = B_1$ и среднеквадратические погрешности определяют как

$$\delta x_j = \frac{A_1}{A_j} \cdot \delta x_1,$$

т.е. обратно пропорционально коэффициентам A_j .

Выше рассмотрен простейший расчетный подход к определению допусков на первичные параметры. В более сложных случаях учитывают корреляцию между отдельными параметрами, стоимостные затраты на обеспечение требуемого поля допуска. Задача приобретает оптимизационный характер, а расчетные соотношения существенно усложняются.

Недостатком метода, как и при решении прямой задачи, является неучет нелинейных свойств зависимости (8.1), а также использование только нормального распределения выходного параметра и соответствующих погрешностей.

2. Метод статистического моделирования

Этот метод является итерационным применением такого же метода при решении прямой задачи определения допусков. На каждом этапе итерационного процесса выполняют следующее:

а) корректируют значения среднеквадратических отклонений (СКО) допусков на первичные параметры;

б) статистически моделируют значения первичных параметров в соответствии со скорректированными СКО и действительными законами распределения;

в) определяют моделируемые значения выходного параметра, выполняют их статистическую обработку и оценку эффективности коррекции.

Корректировать необходимо прежде всего влияющие первичные параметры. Маловлияющие параметры при статистическом моделировании можно считать условно постоянными.

Постановка задачи лабораторной работы

1. В данной работе объектом изучения является метод статистического моделирования при решении прямой и обратной задач определения допусков.

2. Конкретным объектом исследования принята эквивалентная электрическая схема заданного варианта (см. прил. 1).

3. Выходным параметром объекта является значение коэффициента усиления. Так как объект - динамический, то значение выходного параметра зависит от частоты входного сигнала и представляет собой амплитудно-частотную характеристику (АЧХ). С учетом этого анализ и расчеты допусков необходимо выполнить для той частоты, на которой влияние разброса значений первичных параметров максимально. Поэтому вначале необходимо определить эту частоту.

4. При выполнении работы закон распределения первичных параметров и их погрешностей принять нормальным. Значения первич-

ных параметров и их изменения полагать независимыми друг от друга.

5. Допуск на первичные параметры установить по правилу "трех сигм".

6. На всех этапах предварительного анализа и моделирования использовать программы MathCAD. Поэтому перед выполнением работы необходимо ознакомиться с методикой пользования системой MathCAD по приложению к работе или другому источнику по MathCAD.

Порядок выполнения работы

1. Для заданного варианта устройства определить аналитическое выражение выходного параметра устройства как функции значений параметров элементов (зависимость АЧХ от значений сопротивлений резисторов, емкости конденсаторов и т.д.).

2. Выполнить расчет АЧХ $K(f, x^{ном})$ в заданном диапазоне частот при номинальных значениях параметров элементов $x^{ном}$.

3. Рассчитать частотные зависимости коэффициентов влияния элементов ЭС на АЧХ по формуле

$$K_{Bi}(f) = \frac{\{K(x_i^{ном} + \Delta x_i) - K(x_i^{ном})\} \cdot x_i^{ном}}{\Delta x_i \cdot K(x_i^{ном})},$$

где Δx_i — малое приращение номинального значения параметра $x_i^{ном}$;

f — частота сигнала,

$K(x^{ном})$ — значение АЧХ при номинальных значениях параметров элементов.

4. Найти частотную зависимость относительной погрешности выходного параметра из выражения

$$\delta y(f) = \frac{\Delta y(f)}{y(f)} = \sum_{i=1}^N K_{Bi} \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i},$$

где N — количество элементов в устройстве.

5. Найти частоту f_n , на которой $|\delta y(f_n)|$ достигает максимального значения, т.е. частоту, на которой влияние разброса значений элементов максимально.

6. Для выбранной частоты f_n проанализировать значения коэффициентов влияния $K_{Bi}(f_n)$ по всем элементам и отобрать для статистического моделирования два-три элемента, максимально влияющих на АЧХ.

7. Задать начальное значение допуска δ на элементы ЭС.

8. Для получения нормально распределенных значений элементов использовать алгоритм генерации случайных чисел, основанный на центральной предельной теореме. Каждое новое нормальное число с нулевым средним и единичной дисперсией может быть получено из суммы m равномерно распределенных чисел r по формуле

$$x_i^0 = \sqrt{\frac{12}{m}} \cdot \left(\sum_{j=1}^m r_j - \frac{m}{2} \right), \quad i = 1 \dots M; \quad (8.10)$$

где M — требуемое количество нормально распределенных чисел с нулевым средним и единичной дисперсией.

Для получения нормально распределенных чисел со средним m_X (номинальное значение параметра элемента $x^{ном}$) и среднеквадратическим отклонением значения параметра $\delta = m_X \cdot \delta / 3$ (здесь δ — ширина половины поля допуска на значение параметра элемента) следует применять линейное преобразование

$$x_i = m_X + \delta \cdot x_i^0, \quad (8.11)$$

где x_i — нормальные случайные числа с $m = 0$, $\delta = 1$.

9. Согласно алгоритмам (8.10) и (8.11) выполнить генерацию M случайных значений для каждого из отобранных для моделирова-

ния элементов.

10. Рассчитать M значений коэффициента передачи $K_j(f_n), j=1...M$.

11. Выполнить статистический анализ полученных данных, для чего:

- рассчитать среднее значение величины $K(f_n)$ и сравнить его со значением АЧХ $K_{ном}$ на частоте f_n при номинальных значениях элементов;

- рассчитать среднеквадратическое отклонение величины $K(f_n)$;

- найти минимальное и максимальное значения величины $K(f_n)$;

- построить гистограмму распределения случайных значений величины $K(f_n)$.

12. Для заданного допуска d на выходной параметр определить верхнее и нижнее допустимые значения АЧХ на частоте f_n :

$$K_{min} = K_{ном} - d \cdot K_{ном}, \quad K_{max} = K_{ном} + d \cdot K_{ном}.$$

13. Нанести допустимые границы K_{min} и K_{max} на гистограмму распределения величины $K(f_n)$.

14. Рассчитать количество отсчетов величины $K(f_n)$, выходящих за границу допуска $[K_{min}, K_{max}]$.

15. Рассчитать вероятность нахождения АЧХ в пределах допуска и сравнить ее с заданной.

16. Если полученная вероятность нахождения АЧХ в пределах допуска меньше заданной, переопределить поля допусков на номиналы элементов обратно пропорционально их влиянию на значения выходного параметра и повторить расчеты пп. 8 – 15.

17. Сделать выводы по результатам лабораторной работы.

18. Оформить отчет о лабораторной работе.

Содержание отчета

Отчет о лабораторной работе должен содержать:

- эквивалентную электрическую схему объекта;
- аналитическое выражение АЧХ;
- график АЧХ в заданном диапазоне частот;

- графики коэффициентов влияния по каждому из параметров в заданном диапазоне частот;
- частотную зависимость относительной погрешности выходного параметра;
- алгоритм моделирования случайных значений первичных параметров и реализацию моделируемых значений выходного параметра;
- результаты оценки среднего значения, среднеквадратического отклонения, поля допуска на выходной параметр по заданной относительной погрешности на него;
- результаты оценки вероятности нахождения выходного параметра в поле допуска;
- результаты коррекции допусков на первичные параметры.

Пример программы определения ширины поля допуска приведен в прил. 5.

Контрольные вопросы

1. Чем различаются прямая и обратная задачи расчета допусков?
2. Докажите, что при малости допусков на первичные параметры возможно линейное представление допуска на выходной параметр.
3. Что характеризует коэффициент влияния?
4. В чем суть расчета допусков на "наихудший случай"? Его недостатки.
5. В чем суть вероятностного метода расчета допусков? Его недостатки.
6. В чем суть метода статистического моделирования при установлении допусков? Его преимущества.
7. Почему маловлияющие параметры при статистическом моделировании можно принимать условно постоянными?
8. Для чего необходимо определять частотную зависимость относительной погрешности выходного параметра?

9. Как определить вероятность нахождения параметра в допуске по гистограмме его распределения?

10. Почему допуск на первичный параметр корректируют обратно пропорционально коэффициенту влияния?

Лабораторная работа № 9

Методы цифрового статистического моделирования безотказности сложных объектов

Цель работы

- изучить методику моделирования отказов объекта по его надежностной схеме;
- получить навыки моделирования отказов по виду распределения и по параметрической модели.

Необходимые теоретические сведения

При анализе надежности технические объекты можно рассматривать как единое целое (элемент) или сложное (с позиций надежности) соединение элементов. Во втором случае возникает необходимость определить характеристики безотказности объекта по известным характеристикам безотказности составляющих частей (элементов).

С точки зрения надежности различают следующие основные типы соединений элементов (структур) (рис.9.1):

- последовательное - отказ объекта происходит при отказе одного из элементов;
- параллельное - отказ объекта - при отказе всех элементов;
- мостиковое - отказ объекта - при отказе элементов 1,2,5,4 или 3,4,5,2;

– комбинированное - всевозможные комбинации указанных соединений.

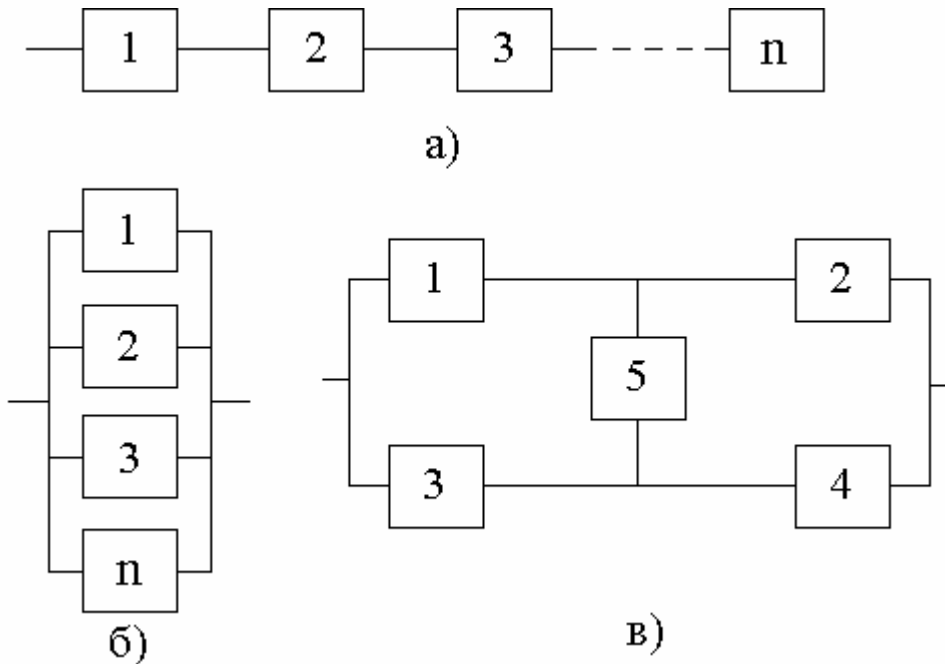


Рис. 9.1. Надежные соединения элементов:
а) последовательное; б) параллельное; в) мостиковое

Зная вероятности $P_i(t)$ безотказной работы комплектующих элементов, в предположении независимости отдельных отказов можно рассчитать такие же вероятности $P_i(t)$ для объекта в целом:

$$P(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t) \text{ — для последовательного соединения;}$$

$$P(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P_i(t)] \text{ — для параллельного соединения;}$$

$$P(t) = [2 - P_1(t) \cdot P_3(t)] \cdot [1 - P_2(t)] \cdot [1 - P_4(t)] \cdot [1 - P_5(t)].$$

Сводя комбинированное соединение к конкретной комбинации указанных соединений, можно найти $P(t)$ и для него. Зная $P(t)$, можно определить и другие показатели безотказности (см. лаб. работу № 7).

Однако такой подход во многих случаях неприемлем по следующим причинам:

а) функция $P(t)$ может оказаться очень сложной для интегрирова-

ния и взятия производных;

б) вероятности $P_i(t)$ не всегда известны, их приходится определять через другие известные характеристики;

в) вероятности $P_i(t)$ часто нельзя выразить в элементарных функциях.

В этом случае эффективным средством решения задачи оценки показателей безотказности является метод цифрового статистического моделирования наработок до отказа отдельных элементов и определения по ним наработок до отказа всего объекта с последующей статистической обработкой данных такого моделирования.

При последовательном и параллельном соединениях наработка до отказа

$$t = \min (t_1, t_2, \dots, t_n), \quad (9.1)$$

$$t = \max (t_1, t_2, \dots, t_n). \quad (9.2)$$

При комбинированном соединении (рис.9.2)

$$t = \min (t_1, \max (t_2, t_3), t_4). \quad (9.3)$$

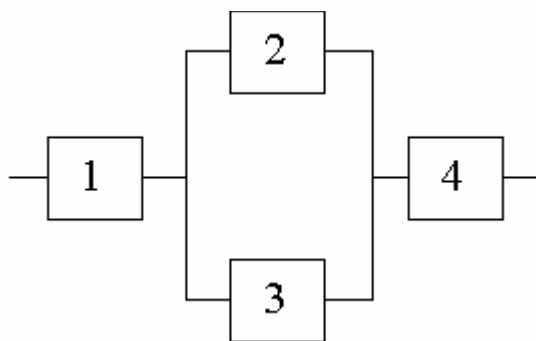


Рис. 9.2. Пример комбинированного соединения

Таким образом, задача сведена к статистическому моделированию наработок до отказа t_i отдельных элементов и ее можно решать двумя путями:

а) статистическим моделированием реализаций наработок по заданному или определенному закону распределения;

б) статистическим моделированием параметров физической мо-

дели возникновения отказа.

В первом из этих случаев используют известный подход формирования случайных реализаций путем функционального преобразования реализаций величины r равномерно распределенной в интервале $[0,1]$. В табл. 1 приведены алгоритмы такого формирования для наиболее распространенных в надежности законов распределения.

Преобразование $\sqrt{-2 \cdot \ln(r_1)} \cdot \cos(2\pi \cdot r_2)$, приведенное в табл.9.1, формирует реализацию нормальной случайной величины с нормированным распределением $N(0,1)$ по двум независимым реализациям r_1, r_2 случайной величины r (используют два независимых обращения к датчику r).

Наработка до отказа является положительной случайной величиной, поэтому для моделирования нормально распределенных наработок следует применять усеченное нормальное распределение $N(m, \delta, a, b)$ с параметрами $a=0$ и $b=\infty$. Если же выполнимо условие $m > 3\delta$, то можно использовать и распределение $N(m, \delta)$, так как вероятность появления отрицательных реализаций ничтожна.

Во втором случае для моделирования используют физические модели возникновения отказов по схеме "нагрузка-прочность" или нахождения определяющего параметра в поле допуска (см. лаб. работу № 8). Во второй схеме одной из моделей изменения определяющего параметра y является полиномиальная модель

$$y(t) = \sum_{v=\delta}^m a_v t^v, \quad (9.4)$$

где коэффициенты a_v являются случайными величинами, изменяющимися от изделия к изделию. Если задано допустимое значение y_d определяющего параметра, то из уравнения

$$y_d = \sum_{v=\delta}^m a_v t^v, \quad (9.5)$$

Таблица 9.1

Алгоритм моделирования наработок до отказа элементов

Закон распределения наработки	Выражение плотности распределения $f(t)$	Условное обозначение	Алгоритмы формирования наработок t из равномерно распределенных R
Экспоненциальный	$\lambda e^{-\lambda t}$	$E(\lambda)$	$-\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(r)$
Нормальный	$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$	$N(m, \sigma)$	$m + \sigma \cdot [\sqrt{-2 \cdot \ln(r_1)} \cdot \cos(2\pi \cdot r_2)]$
Вейбулла	$\frac{a}{\lambda} \left(\frac{t}{b}\right)^{m-1} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{t}{b}\right)^m\right\}$	$B(a, b)$	$\frac{1}{b} \cdot (-\ln(r))^{1/2}$
Логарифмический	$\frac{-1}{t\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\left[\ln\left(\frac{t}{m}\right)\right]^2}{2\sigma^2}\right\}$	$\text{Ln}(m, \sigma)$	$m_x \cdot \exp(\sigma N),$ $N = \sqrt{-2 \cdot \ln(r_1)} \cdot \cos(2\pi \cdot r_2)$
Усеченный нормальный	$\begin{cases} N(m, \sigma) & \text{при } t \in [a, b] \\ 0 & \text{при } t \notin [a, b] \end{cases}$	$N(m, \sigma, a, b)$	$\begin{cases} N(m, \sigma) & \text{при } a \leq N \leq b \\ 0 & \text{в других случаях} \end{cases}$
Релея	$\frac{t}{\lambda} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2\lambda^2}\right)$	$\text{Re}(0, \lambda)$	$\lambda \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln(r)}$

получают значения наработки до параметрического отказа

$$t = \phi(y_d, a_v), \quad v = \overline{1, m}. \quad (9.6)$$

Зависимость (9.6) при известных законах распределения коэффициентов a_{ν} определяет закон распределения наработки до параметрического отказа. Статистическое моделирование этой наработки сводится к статистическому моделированию значений коэффициентов a_{ν} обычным путем и вычислению наработки по соотношению (9.6).

Постановка задачи лабораторной работы

Объектами анализа в данной лабораторной работе являются объекты, представленные своими надежностными схемами (табл. 9.2). Часть элементов этих схем имеет наработки до отказа, описываемые плотностями распределения $f(t_1), f(t_2), f(t_3)$, с представленными в таблице параметрами. Элемент №4 подвержен параметрическим отказам по указанным в таблице закону изменения определяющего параметра $y(t)$ и его допустимым значениям y_d . Предполагают, что коэффициенты a_{ν} подчиняются нормальному закону распределения с параметрами $ma_{\nu}, \sigma a_{\nu}$, значения которых приведены в табл. 9.3.

В лабораторной работе необходимо разработать и реализовать в системе MathCAD алгоритм статистического моделирования наработок до отказа заданного варианта объекта.

Таблица 9.2

Данные к вариантам заданий

Номер варианта	Надежностная схема объекта испытаний	$f(t_1)$	$F(t_2)$	$f(t_3)$
1 2		$E(0.05)$ $Re(0;50)$	$N(50;6)$ $E(0.01)$	$L(100;.1)$ $B(5;.01)$
3 4		$N(60;10)$ $B(5;.01)$	$E(0.01)$ $Re(0;50)$	$Re(0;30)$ $N(50;6)$

Окончание табл. 9.2

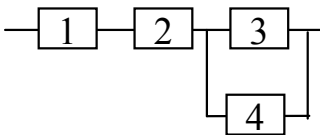
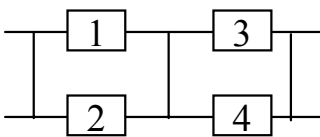
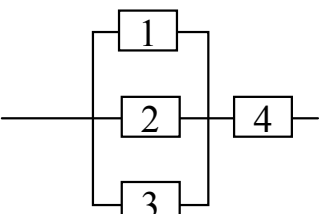
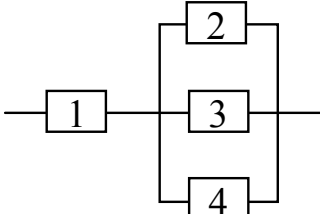
Номер варианта	Надежностная схема объекта испытаний	$f(t_1)$	$F(t_2)$	$f(t_3)$
5 6		$L(100;.1)$ $E(0.05)$	$N(60;10)$ $B(5;.01)$	$E(0.01)$ $L(100;.1)$
7 8		$N(60;10)$ $B(5;.01)$	$Re(0;60)$ $E(0.01)$	$N(50;6)$ $Re(0;50)$
9 10		$E(0.05)$ $Re(0;50)$	$N(50;6)$ $E(0.01)$	$L(100;.1)$ $B(10;.01)$
11 12		$L(100;.1)$ $E(0.05)$	$N(60;10)$ $B(5;.01)$	$E(0.01)$ $L(100;.1)$

Таблица 9.3

Номер варианта	$y(t)$	t_4				y_d
		ma_0	σa_0	ma_1	σa_1	
1	$a_0 + a_1 t$	5	1	0.5	0.1	7
2	$a_0 + a_1 t^2$	6	1.5	2	1	10
3	$a_0 - a_1 t$	5	1	0.5	0.1	0
4	$a_0 - a_1 t^2$	6	2	0.4	0.1	1
5	$a_0 + a_1 t^3$	5	1	2	1	10
6	$a_0 - a_1 t^3$	6	1	2	1	1

Номер варианта	t_4					
	$y(t)$	ma_0	σa_0	ma_1	σa_1	y_d
7	$a_0 - a_1 t$	5	1	0.5	0.1	0
8	$a_0 - a_1 t^2$	6	2	0.4	0.1	1
9	$a_0 + a_1 t$	5	1	0.5	0.1	7
10	$a_0 + a_1 t^2$	6	1.5	2	1	10
11	$a_0 + a_1 t^3$	5	1	2	1	10
12	$a_0 - a_1 t^3$	6	1	2	1	1

Порядок выполнения лабораторной работы

1. В соответствии с вариантом задания составить подпрограмму генерации случайных наработок до параметрического отказа.
2. В соответствии с вариантом задания и табл. 9.1 составить подпрограмму генерации наработок до отказа для элементов 1,2,3.
3. Составить программу моделирования наработок до отказа всего объекта.
4. Реализовать программу, выполнив генерацию 200 наработок до отказа.
5. Используя встроенную статистическую функцию Hist, построить гистограмму распределения наработки до отказа.
6. Сделать качественный вывод о характере распределения наработки до отказа.
7. Оформить отчет о лабораторной работе.

Содержание отчета

Отчет о лабораторной работе должен содержать:

- надежность структуру объекта;
- исходные данные для моделирования (виды законов распределения и их параметры, вид функции $y(t)$ с коэффициентами a_0);
- алгоритм и программу моделирования;

- результаты реализации программы моделирования.

Контрольные вопросы

1. Получите соотношения вероятности безотказной работы для типовых соединений.
2. Запишите выражение вероятности безотказной работы для заданной преподавателем комбинированной схемы.
3. Получите выражение наработки до отказа по заданной надежной схеме.
4. Как моделируются параметрические отказы?

Лабораторная работа № 10

Методика активного оптимального эксперимента по построению регрессионных моделей объектов

Цель работы:

- изучить методику планирования, проведения и обработки данных активного оптимального экспериментального построения регрессионной модели выходных параметров радиотехнического объекта на примере полного факторного эксперимента;
- получить навыки в практическом планировании, проведении и обработке данных эксперимента и работе с необходимыми статистическими таблицами.

Необходимые теоретические сведения

Параметры и показатели качества технических объектов (электронных средств, технологических процессов) являются функциями физических, химических, электрических и других факторов, например, температуры окружающей среды или блоков устройства, вели-

чины питающего напряжения, номиналов электрорадиоэлементов и т.д. Знание таких функциональных зависимостей необходимо для решения задач назначения допусков, выбора оптимальных режимов и т.п.

В большинстве случаев такие зависимости чисто теоретически можно обосновать весьма приближенно, поэтому появляется необходимость экспериментального определения связей между независимыми переменными (факторами) x_i , которые можно только измерять или же измерять и изменять по воле экспериментатора, и зависимой переменной (откликом) y . Это и составляет предмет регрессионного анализа, а найденную зависимость называют регрессионной.

Часто структура регрессионной модели из теоретических предположений или из предшествующего опыта известна, а неизвестны ее параметры Θ_i , которые и должны быть в регрессионном эксперименте определены.

При этом выделяют такие разновидности регрессионных моделей:

- линейную по переменным и параметрам

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p;$$

- линейную по параметрам, но нелинейную по переменным

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p;$$

- линейную по переменным, но нелинейную по параметрам

$$y = a_0 + a_1 a_2 x_1 + a_1 x_2 + a_3 x_3 + \dots;$$

- нелинейную по переменным и параметрам

$$y = \exp(a_1 x_1) + \exp(a_2 x_2).$$

Линейную по параметрам модель в общем виде можно представить как

$$y = a_0 f_0(\vec{x}) + a_1 f_1(\vec{x}) + \dots ,$$

где $\vec{x}^T = (x_1, \dots, x_n)$, T — символ транспонирования.

Если же функциональная структура зависимости неизвестна, то можно воспользоваться ее разложением в ряд Тейлора в окрестностях опорной точки \vec{x}_0 и представить в виде

$$y = a_0 + \sum a_i x_i + \sum a_{ij} x_i x_j + \sum a_{ijk} x_i x_j x_k + \sum a_{ii} x_i^2 + \dots \quad (10.1)$$

В выражение (10.1) можно ввести новые обозначения переменных:

$$x_0 = 1, \quad x_i = x_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad x_1 x_2 = x_{n+1} \dots$$

и свести модель (10.1) к виду линейной по параметрам модели:

$$y = \sum_{i=0}^N a_i x_i, \quad (10.2)$$

где x_i — фиктивная переменная.

К этому же виду в окрестностях точки \vec{x}_0 могут быть сведены модели с известной структурой регрессионной зависимости.

Введя матричные обозначения

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix},$$

выражение (10.2) можно представить как

$$y = a^T \vec{x} = a \vec{x}^T. \quad (10.3)$$

Особенностью любого эксперимента являются погрешности в измерении переменных. С учетом этого соотношение (10.3) можно записать как

$$y = a^T \vec{x} + \varepsilon, \quad (10.4)$$

где ε — обобщенная аддитивная погрешность (помеха).

Помеху ε часто можно считать центрированной нормально распределенной величиной с распределением

$$f(\varepsilon) = N(0, \sigma_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\pi\sigma_\varepsilon^2}\right\}.$$

Предположим проведено N серий экспериментальных наблюдений, результаты которых можно представить в матричном виде

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_N \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_{01} & \dots & x_{n1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ x_{0N} & \dots & x_{nN} \end{bmatrix}, \quad \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}, \quad (10.5)$$

где X называется матрицей эксперимента.

Матричные переменные в (10.5) связаны матричным соотношением

$$\bar{y} = (a^T X + \bar{\varepsilon}). \quad (10.6)$$

Применяя к выражению (10.6) метод наименьших квадратов, получают оценку \hat{a} вектора неизвестных коэффициентов \hat{a} в виде:

$$\hat{a} = (x^T x)^{-1} x^T \bar{y}, \quad (10.7)$$

где матрица $C = (x^T x)^{-1}$ определяет ковариационные свойства вектора оценок \hat{a} (при этом вектор \hat{a} является случайным, так как случаен вектор \bar{y}) и, в частности, дисперсии или точность оценок \hat{a}_i коэффициентов a_i .

Регрессионный эксперимент называют пассивным, если переменные x_i только регистрируют в ходе эксперимента, и активным, если в ходе эксперимента переменными управляет экспериментатор. В последнем случае есть возможность получать матрицу C с наперед заданными свойствами. При этом матрицу X эксперимента следует формировать по соответствующим правилам. Это приводит к различным планам активного эксперимента.

В данной работе в качестве примера рассматривают один из таких планов: полный факторный эксперимент (ПФЭ) с условным обозначением 2^P , где P — число независимых переменных x_i в векторе \vec{x} .

Этот план эксперимента приводит к следующему:

1) матрица C диагонализуется, что соответствует ортогонализации столбцов матрицы X эксперимента (поэтому этот план относят к группе "ортогональных");

2) регрессионная зависимость представляется в виде полинома первого порядка

$$y = a_0 + \sum a_i x_i + \sum a_{ij} x_i x_j + \sum a_{ijk} x_i x_j x_k .$$

3) число независимых переменных P определяет полное число переменных и коэффициентов $M = 2^P$ и минимально необходимое число строк матрицы эксперимента $K = 2^P$, т.е. матрица эксперимента является квадратной;

4) оценки \hat{a}_i коэффициентов полинома оказываются независимыми друг от друга и одинаково точными;

5) варьирование независимых переменных x_i осуществляется всего лишь на двух уровнях: x_{imin} , x_{imax} .

Изучение основных положений методики планирования, проведения и обработки данных на примере ПФЭ и составляет цель данной работы.

Лабораторный макет

Объектом исследования в данной лабораторной работе является мультивибратор, состоящий из двух активных элементов — VT_1 , VT_2 и восьми пассивных элементов — R_1 – R_6 , C_1 , C_2 . Схема электрическая принципиальная мультивибратора показана на рис. 10.1. Мультивибратор предназначен для генерации последовательности импульсов, вид которых изображен на рис. 10.2.

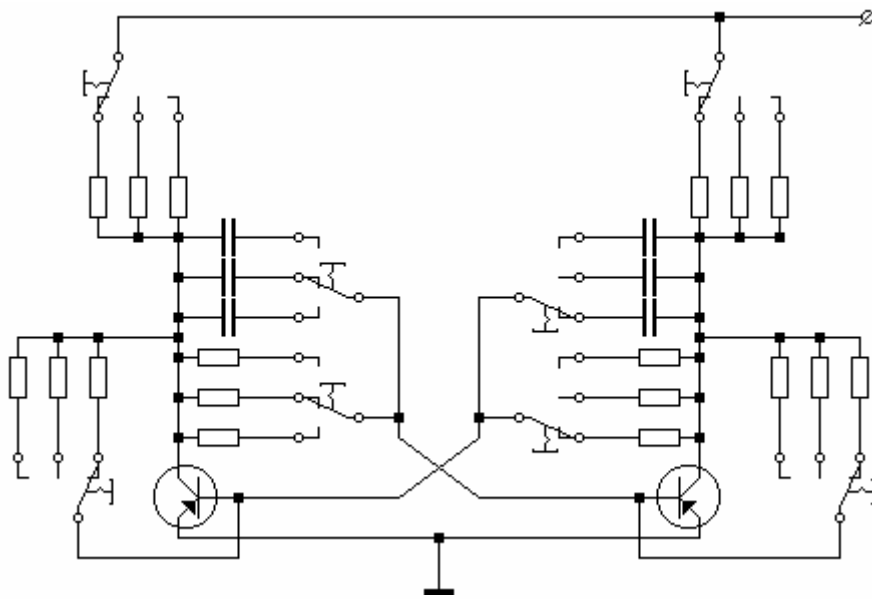


Рис. 10.1 Схема электрическая принципиальная мультивибратора

Эта последовательность характеризуется следующими параметрами:

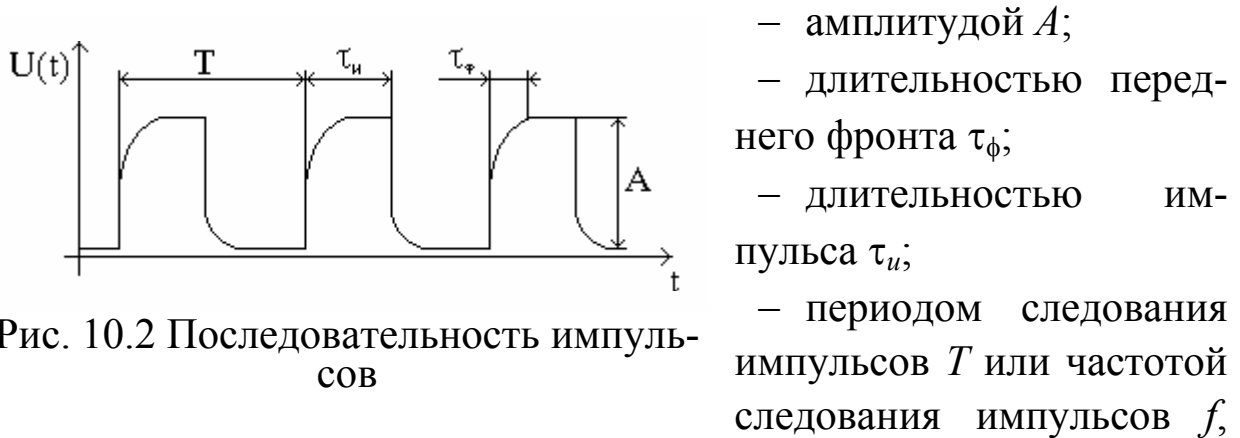


Рис. 10.2 Последовательность импульсов

связанных однозначно соотношением $f = 1/T$.

Каждый из этих параметров является функцией восьми параметров вида

$$y = f(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, C_1, C_2)$$

или $y = f(x_i), i = \overline{1,8}$.

Каждый из этих факторов с помощью тумблера в макете можно варьировать на трех уровнях:

$x_{i \min}$ — левое положение;

x_{i0} — центральное положение;

x_{imax} — правое положение.

При этом шаг варьирования $\lambda_i = (0,1 \dots 0,3) x_{i0}$.

Кроме того, моделируют влияние активных элементов на выходные параметры с помощью тумблера на четыре положения, к контактным группам которого подключены четыре пары транзисторов одного номинала. За счет технологического разброса параметров транзисторов значения выходных параметров случайно изменяются при одних и тех же значениях входных факторов, что дает возможность получить в эксперименте значения функции отклика

$$y_i = y + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,4}.$$

Макет питается напряжением 10 В и имеет выход для подключения измерительного прибора. Передняя панель макета показана на рис. 10.3.

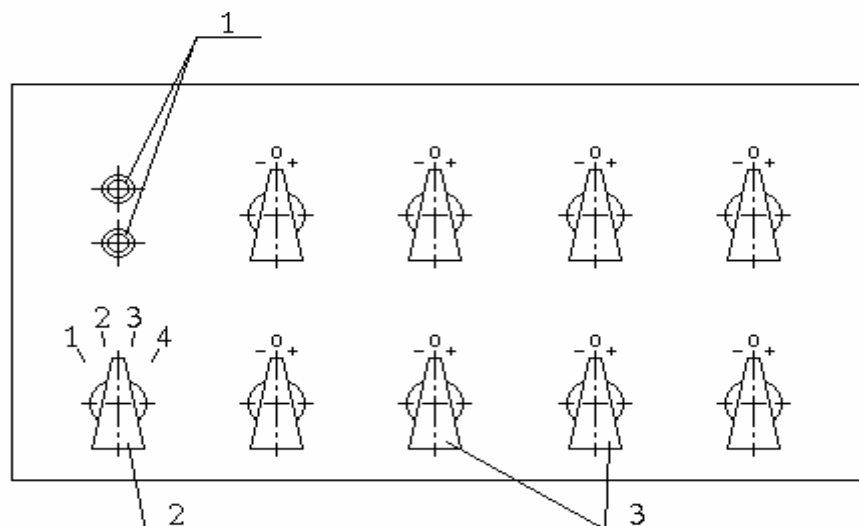


Рис. 10.3 Передняя панель макета:
1 — выход мультивибратора; 2 — переключатель пар транзисторов; 3 — переключатели параметров мультивибратора

Постановка задачи лабораторной работы

В работе необходимо получить регрессионную модель одного из параметров сигнала от трех независимых факторов:

$$y = f(x_1, x_2, x_3)$$

в виде полинома первого порядка

$$y = B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 + \\ + B_{12} x_1 x_2 + B_{23} x_2 x_3 + B_{13} x_1 x_3 + B_{123} x_1 x_2 x_3 .$$

Вид параметра устанавливает преподаватель. Факторы x_1, x_2, x_3 выбирают студенты в ходе предварительного эксперимента.

Содержание работы

1. Проведение предварительного эксперимента

Эксперимент проводят в целях выделения из восьми переменных трех, наиболее влияющих на исследуемый параметр y , и он не носит обязательный для методики характер.

При его проведении всем факторам x_i последовательно дают приращения $x_{i \min}, x_{i \max}$ и фиксируют при этом размах варьирования выходной переменной Δy_i . По значению величины Δy_i выбирают три наиболее влиятельных фактора.

Предварительное планирование эксперимента

Переход к нормированным независимым переменным x_i выполняют по соотношениям:

$$x'_i = \frac{x_i - x_{i0}}{\lambda_i}; \quad \lambda_i = \frac{x_{i \max} - x_{i \min}}{2}; \quad x_{i0} = \frac{x_{i \max} + x_{i \min}}{2}.$$

Тогда $x'_{i \min} = -1, x'_{i \max} = +1$.

Переход к регрессионному полиному в нормированных переменных (штрих при переменных условно опущен)

Таблица 10.1

Полный факторный эксперимент 2^3

Номер опыта	Номер после рандомизации	Значения факторов								Выходной параметр y_v				Данные обработки			
		x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	y_1	y_2	y_3	y_4	m_{y_v}	D_{y_v}	\hat{y}_v	$(m_{y_v} - \hat{y}_v)$
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6																	
7																	
8																	
b_i																	
t_i																	
$b_{i_{3H}}$																	

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \\ + b_{12} x_1 x_2 + b_{23} x_2 x_3 + b_{13} x_1 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3 .$$

3. Планирование ПФЭ 2^3

3.1. Составляют заготовку таблицы эксперимента (табл. 10.1).

3.2. Заполняют столбцы x_0, x_1, x_2, x_3 значениями ± 1 факторов (пишут только знак, единицу условно опускают). Принимают $x_0 \equiv 1$. Для обеспечения ортогональности плана эксперимента смену знака в столбцах x_1, x_2, x_3 необходимо осуществлять с разной частотой (x_1 – максимальная частота, x_2 и x_3 – снижена в два раза).

3.3. Определяют знаки в производных столбцах $x_i x_j$.

3.4. Для устранения систематической погрешности эксперимента рандомизируют порядок проведения опытов с помощью таблицы случайных чисел (табл. 10.2). Для этого каждой строчке присваивают случайный порядковый номер (от 1 до 8), встретившийся при произвольном движении по числам таблицы.

Таблица 10.2

Случайные числа

1087	6601	8272	8815	3368	2377	6416	2914	6061	3361
1480	1794	2465	6446	7466	0656	2050	3813	6891	7627
0674	8354	9769	8055	8918	9768	5967	5642	4673	1799
3269	2157	8516	3581	5997	9915	3039	0576	1538	3774
9656	3044	4607	1838	9036	2547	1603	6609	3721	9422
9896	0797	4035	6729	9390	4499	0890	8603	6201	2985
1554	3512	0804	6788	7000	5372	5481	8333	1928	7992
8423	1820	1025	0818	4328	5568	7603	6443	3828	8562
3173	2858	6607	5397	9054	5901	5544	6354	3631	9889
1716	1819	1327	6885	2623	2772	1909	7573	8469	1553

4. Проведение эксперимента

Эксперимент проводят в соответствии с порядком после рандомизации, выставляя значения переменных x_1, x_2, x_3 (соответствующими тумблерами) равными значениям $x_{i \min}, x_{i \max}$ согласно коду строки. По каждой строке плана измеряют выходной параметр y_i для четырех пар транзисторов, переводя переключатель в каждое из четырех положений. Данные измерений заносят в колонки графы "Выходной параметр".

5. Предварительная обработка данных регрессионного эксперимента

5.1. Определяют построчные математические ожидания и дисперсии

$$m_{y_0} = \frac{\sum_{i=1}^{\gamma} y_{i0}}{\gamma}, \quad Dy_0 = \frac{\sum_{i=1}^{\gamma} (y_{i0} - m_{y_0})^2}{\gamma - 1},$$

где $\gamma = 4$ – число параллельных опытов, $\gamma = \overline{1, 8}$.

Для нахождения этих характеристик можно воспользоваться программой **mo.exe**.

5.2. Проверяют гипотезу о воспроизводимости эксперимента. Воспроизводимостью эксперимента называют свойство повторяемости его данных в серии повторных экспериментов. Поскольку эти данные случайны, то можно говорить лишь о повторяемости некоторых характеристик. Такой характеристикой является построчная дисперсия Dy_0 , которая не должна существенно изменяться по строкам эксперимента.

Гипотезу о воспроизводимости эксперимента проверяют, используя критерий Кохрена. Для этого рассчитывают величину

$$G = \frac{Dy_{\max}}{\sum_{\nu=1}^k Dy_{\nu}},$$

где $K = 8$ – число строк в плане эксперимента,

Dy_{\max} – максимальная из построчных дисперсий и сравнивают ее с квантилем распределения Кохрена $G_{табл}(q, K, f_1)$,

где q – уровень значимости (вероятность ошибочного вывода);

$f = \gamma - 1$ – число степеней свободы;

K – число дублированных строк.

Для $q = 0.05$, $f_1 = 3$ и $K = 8$ соответствует $G_{табл} = 0.4377$.

Если $G > G_{табл}$, то эксперимент невоспроизводим.

В этом случае необходимо:

- увеличить число параллельных опытов;
- повысить точность измерений;
- применить к данным нелинейные преобразования вида \sqrt{y} , $\ln y$, $\exp y$ и т.д.

Если эксперимент воспроизводим, то рассчитывают значение дисперсии воспроизводимости

$$Dy = \frac{\sum_{\nu=1}^k Dy_{\nu}}{K}$$

и переходят к основной обработке данных.

Для пересчета значений Dy_{ν} , my_{ν} при нелинейных преобразованиях также можно воспользоваться программой **opt_exp.exe**.

6. Основная обработка данных эксперимента

6.1. Рассчитывают оценки коэффициентов b_i

$$\hat{b}_i = \frac{\sum_{\nu=1}^k x_{i\nu} my_{\nu}}{K}, \quad i = \overline{0, (M-1)},$$

где $M = 8$ – полное число переменных и коэффициентов, и заносят их в соответствующие столбцы табл. 10.1.

6.2. Проверяют значимость каждого коэффициента по критерию Стьюдента. Для этого рассчитывают значение

$$t_i = |\hat{b}_i| \cdot \sqrt{\frac{K \cdot \gamma}{Dy}}$$

и сравнивают его с квантилем распределения Стьюдента $t_{табл}(q, f_2)$,

где $f_2 = K(\gamma - 1)$ – число степеней свободы.

Для $q = 0,05$ и $f_2 = 24$ соответствует $t_{табл} = 2,06$.

Если $t_i < t_{табл}$, то первый коэффициент считают незначимым и обнуляют.

Значения t_i и b_i *знач* заносят в таблицу эксперимента.

Для расчета коэффициентов \hat{b}_i и параметров t_i можно воспользоваться программой **opt_exp.exe**.

7. Подстановка значений коэффициентов

Подставляют найденные значения коэффициентов в модель и рассчитывают предсказанные моделью величины выходного параметра \hat{y}_v для каждой строки плана эксперимента. Записывают найденные значения \hat{y}_v в табл. 1. Для расчета величин \hat{y}_v можно воспользоваться программой **opt_exp.exe**.

8. Проверка адекватности модели

8.1. Если количество (d) значимых коэффициентов меньше полного числа (M) коэффициентов, то адекватность модели определяют по критерию Фишера. Для этого вычисляют дисперсию адекватности

$$D_{ад} = \frac{\sum_{v=1}^k (my_v - \hat{y}_v)^2}{M - d}$$

и величину $F = D_{ад} / Dy$.

Если $F < 1$, то модель считают адекватной. Иначе сравнивают F с квантилем распределения Фишера $F_{табл}(q, f_2, f_3)$,

где $f_3 = M - d$,

$F_{табл}$ для $q = 0,05$ и $f_2 = 24$ выбирают из табл. 3.

Таблица 3

Квантили рапределения Фишера

d	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_{табл}$	254.3	19.5	8.5	5.6	4.4	3.7	3.2	2.9

Если $F < F_{табл}$, то модель считают адекватной.

8.2. Если количество значимых коэффициентов равно их полному числу, то адекватность модели определяют следующим образом:

– вычисляют значения относительной ошибки выходного параметра

$$\sigma_v = \frac{my_v - \hat{y}_v}{my_v};$$

– выбирают максимальную величину σ_v и сравнивают с допустимым значением относительной ошибки;

– если $\max \sigma_v < \sigma_{v доп}$, то модель считают адекватной.

9. Вывод

Делают вывод о применимости или неприменимости полученной модели для данного объекта. Добиться адекватности модели можно также применением нелинейного преобразования функции отклика.

Порядок выполнения работы

1. Получить у преподавателя один из параметров выходного сигнала мультивибратора, подлежащий исследованию.

2. Включить лабораторную установку и убедиться в наличии уста-

новившегося режима генерации мультивибратора.

3. В соответствии с п.1 провести предварительный эксперимент и выбрать три первичных фактора из восьми.

4. В соответствии с п.3 осуществить планирование полного факторного эксперимента.

5. В соответствии с п.4 провести полный факторный эксперимент, дублируя каждую строку плана четыре раза.

6. В соответствии с п.5 выполнить предварительную обработку данных, обеспечив (при необходимости) путем нелинейного преобразования отклика воспроизводимость данных.

7. В соответствии с п.6 выполнить основную обработку данных, получив модель в виде регрессионного полинома со значимыми коэффициентами.

8. В соответствии с п.7 проверить адекватность модели. При необходимости (для обеспечения адекватности) применить нелинейное преобразование отклика.

9. Оформить отчет о лабораторной работе.

Содержание отчета

Отчет о лабораторной работе должен содержать:

- таблицу плана эксперимента с результатами планирования, данными эксперимента и необходимыми результатами обработки;
- основные расчетные соотношения по отдельным этапам методики и результаты обработки;
- выводы по определяющим пунктам методики;
- итоговую регрессионную модель.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит отличие активного эксперимента от пассивного?
2. В чем состоит основная задача оптимального эксперимента?
3. Как осуществить нормировку параметров и для чего?
4. Как строить ортогональную матрицу эксперимента?

5. Что такое воспроизводимость опытов?
6. Что такое воспроизводимость эксперимента?
7. Как оценивать значимость факторов регрессионной модели?
8. В чем состоит сущность понятия "адекватность модели"?
9. Как осуществить проверку адекватности модели?
10. Что такое "рандомизация" опытов и для чего ее выполняют?
11. В чем состоит принцип построения лабораторного макета?
12. Как в лабораторном макете имитируют разброс значений параметров и действие помехи?

Приложение 1

Система автоматизации вычислений MathCAD

Введение

Программная система MathCAD является удобным, наглядным и мощным средством автоматизации вычислений и решения математических задач. Отличительной чертой MathCAD является работа с документом, объединяющим описание математического алгоритма решения задачи с текстовыми комментариями и результатами вычислений в форме чисел, таблиц или графиков. Уникальное свойство MathCAD — возможность описывать математические алгоритмы в естественной математической форме с применением общепринятых математических знаков, таких, например, как квадратный корень, знак интеграла и т. д. Это делает документ, выведенный на экран дисплея, похожим на текст математических книг. Использование MathCAD избавляет пользователя от изучения промежуточного языка программирования (например, Фортрана, Бейсика, Паскаля и т. д.), поскольку большинство задач требуют лишь корректного формульного описания и не нуждаются в подготовке программ в общепринятом виде.

Входной язык системы MathCAD

Этот язык относится к интерпретирующему типу. По мере того как пользователь создает текст, формулы, таблицы и графики, система сама составляет программу на некотором промежуточном языке, которая хранится в ОЗУ до тех пор, пока не будет сохранена на диске в виде файла с расширением. *mcd*.

Алфавит системы MathCAD содержит:

- строчные и прописные латинские буквы;
- греческие буквы;
- арабские цифры от 0 до 9;
- операторы;
- имена встроенных функций;
- спецзнаки.

К типам данных относятся числовые константы, обычные и системные переменные, массивы (векторы и матрицы) и данные файлового типа.

Числовые константы

Числовые константы задаются с помощью арабских цифр, десятичной точки (а не запятой) и знака - (минус). Например:

- 123 — целочисленная десятичная константа;
- 12.3 — десятичная константа с дробной частью;
- $12.3 \cdot 10^{-5}$ — десятичная константа с мантиссой (12.3) и порядком - 5.
- $5+i7$ - комплексное число с реальной частью 5 и мнимой 7.

Переменные

Переменные являются поименованными объектами, имеющими некоторое значение, которое может изменяться по ходу выполнения программы. Имена констант, переменных и иных объектов называют идентификаторами. Тип переменной определяется ее значением.

Идентификаторы в системе MathCAD могут иметь практически любую длину, и в них могут входить любые латинские буквы, а также цифры. Однако начинаться идентификатор может только с буквы, например, x , xl , $alfa$, X_coord . Кроме того, идентификатор не должен содержать пробелов. Нельзя использовать для идентификаторов буквы русского языка. Строчные и прописные буквы в идентификаторах различаются. Идентификаторы должны быть уникальными, т. е. они не могут совпадать с именами встроенных или определенных пользователем функций.

Системные переменные

В MathCAD содержится небольшая группа констант, имеющих предопределенные системой начальные значения, например $\pi=3.1415\dots$, $e=2.71\dots$ и др.

Операторы

Операторы представляют собой элементы языка, с помощью которых можно создавать математические выражения. К ним, например, относятся символы арифметических операций, знаки вычисления сумм, произведений, производной и интеграла и т. д. После указания операндов (параметров операторов) операторы становятся исполняемыми по программе блоками.

Функции встроенные и задаваемые пользователем

MathCAD имеет множество встроенных функций, которые в ответ на обращение к ним по имени с указанием аргумента (или списка аргументов) возвращают некоторое значение — символьное, числовое, вектор или матрицу. В систему встроен ряд функций, например, вычисления синуса $\sin(x)$, логарифма $\ln(x)$ и др. Наряду со встроенными функциями можно задавать функции пользователя, отсутствующие в MathCAD.

Математические выражения

Функции (наряду с операторами) могут входить в математические выражения. Например, в выражении

$$2*\ln(x)+1$$

- 1 и 2 — числовые константы;
- * и + — операторы;
- $\ln(x)$ — встроенная функция;
- x — переменная.

Присваивание переменным значений

Обычные переменные отличаются от системных тем, что они должны быть предварительно определены пользователем, т. е. им необходимо хотя бы однажды присвоить значение. В качестве оператора присваивания используется знак :=, тогда как знак = отведен для вывода значения константы или переменной, например,

$$R:=5.5; \quad C:=6; \quad T:=R\cdot C; \quad T=33.$$

Ранжированные переменные и массивы

Ранжированные переменные — особый класс переменных, который в системе MathCAD заменяет управляющие структуры, называемые циклами. Эти переменные имеют ряд фиксированных значений, меняющихся с определенным шагом от начального значения до конечного.

Ранжированные переменные характеризуются именем и индексом каждого своего элемента. Для создания ранжированной переменной целочисленного типа используют выражение

$$\text{Name}:=\text{Nbegin}..\text{Nend},$$

где Name — имя переменной, Nbegin — ее начальное значение, Nend — конечное значение, .. — символ, указывающий на изменение переменной в заданных пределах. Символ диапазона вводят клавишей "точка с запятой".

Если $N_{begin} < N_{end}$, то шаг изменения переменной будет равен $+1$, в противном случае -1 . Для создания ранжированной переменной общего вида используют выражение

$$\text{Name} := N_{begin}, (N_{begin} + \text{Step}) .. N_{end}.$$

Здесь Step — заданный шаг изменения переменной (он может быть положительным, если $N_{begin} < N_{end}$ или отрицательным в противном случае). Например, ввод

$$i := 1, 3 .. 10$$

присваивает переменной i ряд значений: 1, 3, 5, 7, 9.

Массивы, векторы и матрицы

Важным типом данных в системе MathCAD являются массивы. Массив — имеющая уникальное имя совокупность конечного числа числовых элементов, упорядоченных заданным образом. В системе MathCAD используют массивы двух наиболее распространенных типов: одномерные (векторы) и двумерные (матрицы). Например, пятиэлементный массив-вектор имеет вид:

номер элемента	0	1	2	3	4
значение элемента	0	1	4	9	16

Индексация элементов массивов

Порядковый номер элемента, который является его адресом, называют индексом. Нижнюю границу индексации задают значением системной переменной $ORIGIN$, которая может принимать значение 0 или 1. Имя массива естественно увязать с именами индексированных переменных, значениями которых являются элементы массива. Для этого достаточно в виде подстрочного индекса указать индекс элемента. Для ввода индекса после ввода имени массива, например X , необходимо нажать клавишу "квадратная скобка" [

.

При этом откроется поле индекса ■, которое необходимо запол-

нить, например, x_i . Для ввода выражения в индексе, например $i+j$, в поле индекса необходимо сначала ввести скобки: $X()$.

Примеры ввода чисел и операций представлены в табл. 1.

Таблица 1

Ввод чисел и операций

Тип числа или операции	В математике	Ввод с клавиатуры	Изображение на экране
Целое	3	3	3
Действительное	11.72	11.72	11.72
Комплексное	$3 + i5$	$3+5i$	$3+5i$
Сложение	$3+5$	$3+5$	$3+5$
Вычитание	$3-5$	$3-5$	$3-5$
Умножение	3×5	$3*5$	$3 \cdot 5$
Деление	$3/5$	$3/5$	$\frac{3}{5}$
Возведение в степень	3.5^{-3}	3.5^{-3}	3.5^{-3}
Квадратный корень	$\sqrt{5}$	$5\backslash$	$\sqrt{5}$
Число π	3.14159265...	Alt-P	П

Матрицы

Матрицу можно рассматривать как совокупность ряда векторов одинаковой длины. Для каждой индексированной переменной указывают два индекса: один — для номера строки, другой — столбца. Например, для матрицы M

$$M := \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

первый элемент обозначают как $M(0,0)=6$, а последний как $M(1,1)=3$.

Для задания векторов и матриц можно воспользоваться операцией Matrix... (Матрицы...), нажав клавиши Alt+M. Это вызывает вначале появление на экране диалогового окна, в котором надо указать размерность матрицы, т. е. количество ее строк и столбцов. Для векторов один из этих параметров должен быть равен 1.

Индексы могут иметь только целочисленные значения. Они могут начинаться с нуля или целого числа, например с единицы, в соответствии со значением системной переменной ORIGIN. В отношении индексированных переменных действуют те же правила присваивания и вывода, что и для обычных. В частности, с помощью операций присваивания можно создать вектор или матрицу заданной размерности и заданного типа без ручного вывода их шаблоном и без их заполнения. Например,

$$i := 1..3 \quad j := 1..3 \quad M_{i,j} := i + j$$

создадут матрицу

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Данные файлового типа

Еще один важный тип данных системы MathCAD — файловые данные. В сущности, это те же векторы и матрицы, но с элементами, которые могут быть записаны в виде файлов, имеющих свои имена. Файлы данных в системе представляют собой запись матриц в их естественной форме как последовательных текстовых файлов. Это простейший тип файлов, который легко обрабатывается в программах на различных языках программирования, благодаря чему возможен обмен данными между системой MathCAD и другими

программами. В ходе создания файла система считывает значения элементов векторов и матриц поэлементно (для матриц слева направо и сверху вниз) и по ходу считывания преобразует числовые значения элементов.

Операция-функция READ (Имя_файла) считывает данные из файла с указанным именем. Обычно ее используют для присваивания значений векторам, например:

$$V := \text{READ}(\text{DATA}).$$

Здесь элементы вектора V получают значения, считанные из файла с именем DATA. Естественно, что такой файл должен существовать на диске, иначе ситуация будет считаться ошибочной.

Операция WRITE (Имя_файла) записывает данные в файл и присваивает ему указанное имя. Данные могут создаваться математическим выражением, например:

$$\text{WRITE}(\text{Имя_файла}): = \text{Выражение}.$$

Выражение должно создавать данные векторного типа.

APPEND (Имя_файла) подобна операции WRITE, но она дописывает данные в конец уже существующего файла. Нельзя использовать для дописывания данных другие функции, поскольку они уничтожают прежние данные в файле и заносят новые.

READPRN (Имя_файла) подобна READ, но считывает данные в виде двумерного массива — матрицы. Функция READPRN возвращает матрицу, значения элементов которой однозначно связаны со значениями элементов файла. Точнее каждая строка или столбец возвращаемой матрицы подобны соответствующим строкам или столбцам текстового представления файла.

WRITEPRN (Имя_файла) подобна WRITE, но применяют ее для записи матричного выражения (или матрицы) в файл с указанным именем. Структура файла подобна структуре матрицы.

APPENDPRN (Имя_файла) дописывает данные в уже существ-

вующий матричный файл. Следует особо отметить, что при работе с векторами и матрицами, имеющими комплексные элементы, она использует расширенные векторы или матрицы, элементы которых — действительные числа.

Арифметические и логические операторы

Арифметические операторы

Арифметические операторы предназначены для выполнения арифметических действий над численными величинами и конструирования математических выражений. Система MathCAD содержит следующие арифметические операторы:

- присваивание (:);
- вывод значения (=);
- суммирование (+), вычитание (-);
- умножение (*), деление (/);
- возведение в степень (^);
- вычисление квадратного корня (\);
- вычисление факториала (!);
- вычисление модуля комплексного числа (|).

Ввод операторов был представлен в табл. 1.

Расширенные арифметические операторы

Система MathCAD содержит ряд расширенных арифметических операторов, представленных в табл. 2. При вводе символов (\$), (#), (&) на экран выводится шаблон соответствующей операции. Например, для интеграла шаблон имеет вид:

$$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare d\blacksquare$$

Таблица 2

Ввод расширенных операторов

Оператор	В математике	Ввод с клавиатуры	Изображение на экране
Сумма	$s = \sum_{i=1}^N x_i$	\$	$\mathbf{s := \sum_i x_i}$
Произведение	$p = \prod_{i=1}^N x_i$	#	$\mathbf{p := \prod_i x_i}$
Определенный интеграл	$y = \int_a^b f(x)dx$	&	$\mathbf{y := \int_a^b f(x)dx}$

Шаблон содержит места (■), подлежащие заполнению числовыми или символьными значениями.

На рис. 1 показано применение оператора суммы. Заметим, что выражения с расширенными операторами ведут себя как функции, т. е. возвращают вычисленные значения. Поэтому их можно использовать в составе математических выражений.

Операторы отношения (логические операторы)

Ряд операторов предназначен для сравнения двух величин. Они называются операторами отношения или логическими операторами. Это операторы больше $>$, меньше $<$, равно \approx (вводят Alt =) и др. Не следует путать оператор сравнения (знак равенства) с похожим знаком вывода значений переменных. Необходимо отметить, что выражения с логическими операторами

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{j := 1 \dots 3} \\
 & \mathbf{y_j := 2 \cdot j} \\
 & \mathbf{y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}} \\
 & \mathbf{\sum_j y_j = 12}
 \end{aligned}$$

Рис. 1. Применение оператора суммы

возвращают логическое значение, соответствующее выполнению или невыполнению условия, заданного оператором. Эти значения в системе MathCAD являются логической единицей (1), если условие выполнено, и логическим нулем (0), если оно не выполнено. Математически значения логической единицы и нуля совпадают со значениями числовых констант 1 и 0. Например,

$2 > 1 = 1$ — условие выполнено, результат 1;

$1 > 2 = 0$ — условие не выполнено, результат 0.

Встроенные элементарные функции

Система MathCAD содержит расширенный набор встроенных элементарных функций. Функции задают своим именем и значением аргумента в круглых скобках. В ответ на обращения к ним функции возвращают вычисленные значения. Аргументы и значения функций могут быть действительными или комплексными числами. Ниже представлены эти функции, разбитые на шесть групп.

Тригонометрические функции:

- $\sin(z)$ — синус,
- $\cos(z)$ — косинус,
- $\tan(z)$ — тангенс,
- $\sec(z)$ — секанс,
- $\csc(z)$ — cosecant,
- $\cot(z)$ — котангенс.

Гиперболические функции:

- $\sinh(z)$ — гиперболический синус,
- $\cosh(z)$ — гиперболический косинус,
- $\tanh(z)$ — гиперболический тангенс,
- $\operatorname{sech}(z)$ — гиперболический секанс,
- $\operatorname{csch}(z)$ — гиперболический cosecant,
- $\operatorname{coth}(z)$ — гиперболический котангенс.

Обратные тригонометрические функции:

- $\operatorname{asin}(z)$ — обратный тригонометрический синус,

- $\text{acos}(z)$ — обратный тригонометрический косинус,
- $\text{atan}(z)$ — обратный тригонометрический тангенс.

Обратные гиперболические функции:

- $\text{asinh}(z)$ — обратный гиперболический синус,
- $\text{acosh}(z)$ — обратный гиперболический косинус,
- $\text{atanh}(z)$ — обратный гиперболический тангенс.

Показательные и логарифмические функции:

- $\exp(z)$ — экспоненциальная функция,
- $\ln(z)$ — натуральный логарифм (по основанию e),
- $\log(z)$ — десятичный логарифм (по основанию 10).

Функции комплексного аргумента:

- $\text{Re}(z)$ — выделение действительной части z ,
- $\text{Im}(z)$ — выделение мнимой части z ,
- $\text{arg}(z)$ — вычисление аргумента (фазы) z .

Встроенные специальные математические функции

Наряду с элементарными функциями в системе MathCAD содержится ряд встроенных специальных математических функций, как, например, функции Бесселя:

- $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка;
- $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка;
- $J_1(x)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка и др.

Функции с условиями сравнения

Существует ряд встроенных функций, у которых возвращаемый ими результат зависит от знака или значения аргумента. Так, при их вычислении аргумент сравнивается с некоторыми числовыми константами, например с нулем или целыми числами. К числовым функциям с условиями сравнения относят:

- $\text{ceil}(x)$ — наименьшее целое, большее или равное x ;
- $\text{floor}(x)$ — наибольшее целое, меньшее или равное x ;
- $\text{mod}(x,y)$ — остаток от деления x/y со знаком x ;
- $\text{angle}(a,y)$ — положительный угол с осью x для точки с координатами (x,y) и др.

Функция условных выражений *if*

Более широкие возможности дает функция *if* для создания условных выражений

$\text{if}(\text{Условие}, \text{Выражение 1}, \text{Выражение 2})$.

Если в этой функции условие выполняется, то будет вычисляться выражение 1, в противном случае — выражение 2. Заметим, что эта функция широко распространена в языках программирования. Например, выполнение программы

$$i := 1..100 \quad x_i := \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{i}{20}\right) \quad x_i := \text{if}(x_i > 0, x_i, 0)$$

приведет к заполнению массива x только положительными значениями синуса (с занулением отрицательных значений). С помощью функций с элементами сравнения можно моделировать и другие функции, например логические или описывающие импульсные сигналы различного вида.

Задание функций пользователя

Несмотря на довольно широкий набор встроенных функций, всегда возникает необходимость дополнить систему новыми функциями, представляющими интерес для пользователя. Функции пользователя вводят с применением следующего выражения

Имя_функции (Список_параметров): = Выражение.

Имя функции задают как любой идентификатор, например, имя переменной. В скобках указывают список параметров функции, это перечень используемых в выражении переменных, разделяемых за-

пятыми. Выражение — любое выражение, содержащее доступные системе операторы и функции с операндами и аргументами, указанными в списке параметров. Например, может быть объявлена функция

$$f(x, l) := l \cdot \exp(-l \cdot x),$$

которая затем будет использована в вычислениях:

$$y_i := \sin(z_i) \cdot f(z_i, a).$$

Операторы и функции для работы с векторами и матрицами

Для работы с векторами и матрицами система MathCAD содержит ряд операторов и функций. Вначале рассмотрим операторы, введя следующие обозначения: для векторов — V , для матриц — M и для скалярных величин — Z . Ниже представлены операторы для работы с векторами и матрицами:

- сложение: $V1+V2$;
- вычитание: $V1-V2$;
- смена знака у элементов вектора: $-V$;
- умножение вектора V на скаляр Z : $V*Z$;
- умножение матрицы M на вектор V : $M*V$;
- умножение двух матриц $M1$ и $M2$: $M1*M2$;
- деление вектора V на скаляр Z : V/Z ;
- вычисление определителя матрицы $|M|$.

Векторные функции

Существует ряд встроенных векторных и матричных функций, облегчающих решение задач линейной алгебры и других сфер приложения векторов и матриц. Векторные функции, входящие в систему MathCAD, возвращают:

- $\text{length}(V)$ — длину вектора;
- $\text{last}(V)$ — индекс последнего элемента;
- $\text{max}(V)$ — максимальный по значению элемент;

- $\min(V)$ — минимальный по значению элемент;
- $\text{Re}(V)$ — вектор действительных частей вектора с комплексными элементами;
- $\text{Im}(V)$ — вектор мнимых частей вектора с комплексными элементами и т.д.

Специальные характеристики матриц возвращаются следующими функциями:

- $\text{cols}(M)$ — числом столбцов матрицы M ;
- $\text{rows}(M)$ — числом строк матрицы M ;
- $\text{rank}(M)$ — рангом матрицы M ;
- $\text{tr}(M)$ — следом (суммой диагональных элементов) квадратной матрицы M ;
- $\text{mean}(M)$ — средним значением элементов массива M ;
- $\text{median}(M)$ — медианой элементов массива M и др.

Примеры применения матричных операций:

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{M} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \\
 |\mathbf{M}| = 5 \quad \max(\mathbf{L}) = 9 \quad \text{rows}(\mathbf{L}) = 3 \\
 \mathbf{M} \cdot \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 14 & 32 & 50 \\ 15 & 42 & 69 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} + \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 9 & 9 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \\
 \text{cols}(\mathbf{L}) = 3 \quad \text{tr}(\mathbf{L}) = 15
 \end{array}$$

Функции прямого и обратного преобразований Фурье

К фундаментальным положениям математики относится возможность представления периодических (а при определенных условиях и непериодических) функций совокупностью их гармонических составляющих в виде ряда Фурье.

Если некоторая временная функция $f(t)$ задана рядом отсчетов,

переход от нее к параметрам ряда Фурье (амплитудам и фазам гармоник) называют прямым преобразованием Фурье, а обратный переход — обратным преобразованием Фурье. В MathCAD использован алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Функция $\text{fft}(V)$ выполняет прямое БПФ для данных, представленных действительными числами — значениями исходного вектора V . Однако при этом вектор V должен иметь 2^N составляющих, где N — целое число.

Функция $\text{sfft}(A)$ аналогична предыдущей, но реализует прямое преобразование Фурье для вектора A с комплексными элементами. Если A — матрица, то реализуется двумерное преобразование.

Функция $\text{ifft}(V)$ реализует обратное (инверсное) преобразование Фурье для вектора V с комплексными элементами. Вектор V здесь имеет $2m+1$ элементов. Функция возвращает вектор D с действительными элементами.

Функция $\text{cifft}(B)$ выполняет обратное преобразование Фурье по полному алгоритму, при котором как исходный, так и результирующий векторы или матрицы содержат элементы с комплексными значениями.

На рис. 2 показано прямое преобразование Фурье, а затем обратное. При этом преобразованный вектор полностью совпадает с исходным.

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{k} := 0 \dots 7 \quad \mathbf{x} := \mathbf{k} + 1 \quad \mathbf{y} := \text{fft}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{z} := \text{ifft}(\mathbf{y}) \\
 \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 12.728 \\ -1.414 - 3.414i \\ -1.414 - 1.414i \\ -1.414 - 0.586i \\ -1.414 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Рис. 2. Прямое и обратное преобразования Фурье

Статистические функции

Типовые статистические функции:

- erf(x) — функция ошибок (или интеграл вероятности);
- rnd(x) — функция генерации случайных чисел в диапазоне [0..x];
- mean(V) — возвращает среднее значение элементов вектора V;
- stdev(V) — задает стандартное отклонение элементов вектора V;
- hist(int,V) — возвращает вектор частот попадания данных V в заданные интервалы int (служит для построения гистограмм).

В функции hist(int,V) вектор int должен содержать N+1 значение границ интервалов гистограммы из N элементов. На рис. 3 показан документ, в котором выполнена генерация вектора X из 200 случайных чисел, вычислены основные статистические параметры массива и изображена гистограмма случайных чисел.

Построение графиков в системе MathCAD

Система MathCAD позволяет выполнять построение как двумерных (плоских), так и трехмерных (объемных) графиков. Для создания области двумерного графика используют клавишу @. При этом в документе создается макет поля графика (рис.4) с полями (■), которые необходимо заполнить. Если не указывать пределы по осям X и Y, то они будут вычислены автоматически. В поле переменной для оси Y можно указывать через запятую несколько массивов. Графики при этом будут построены в единой системе координат различными цветами. Пример построения графика функции sin(x) показан на рис.5.

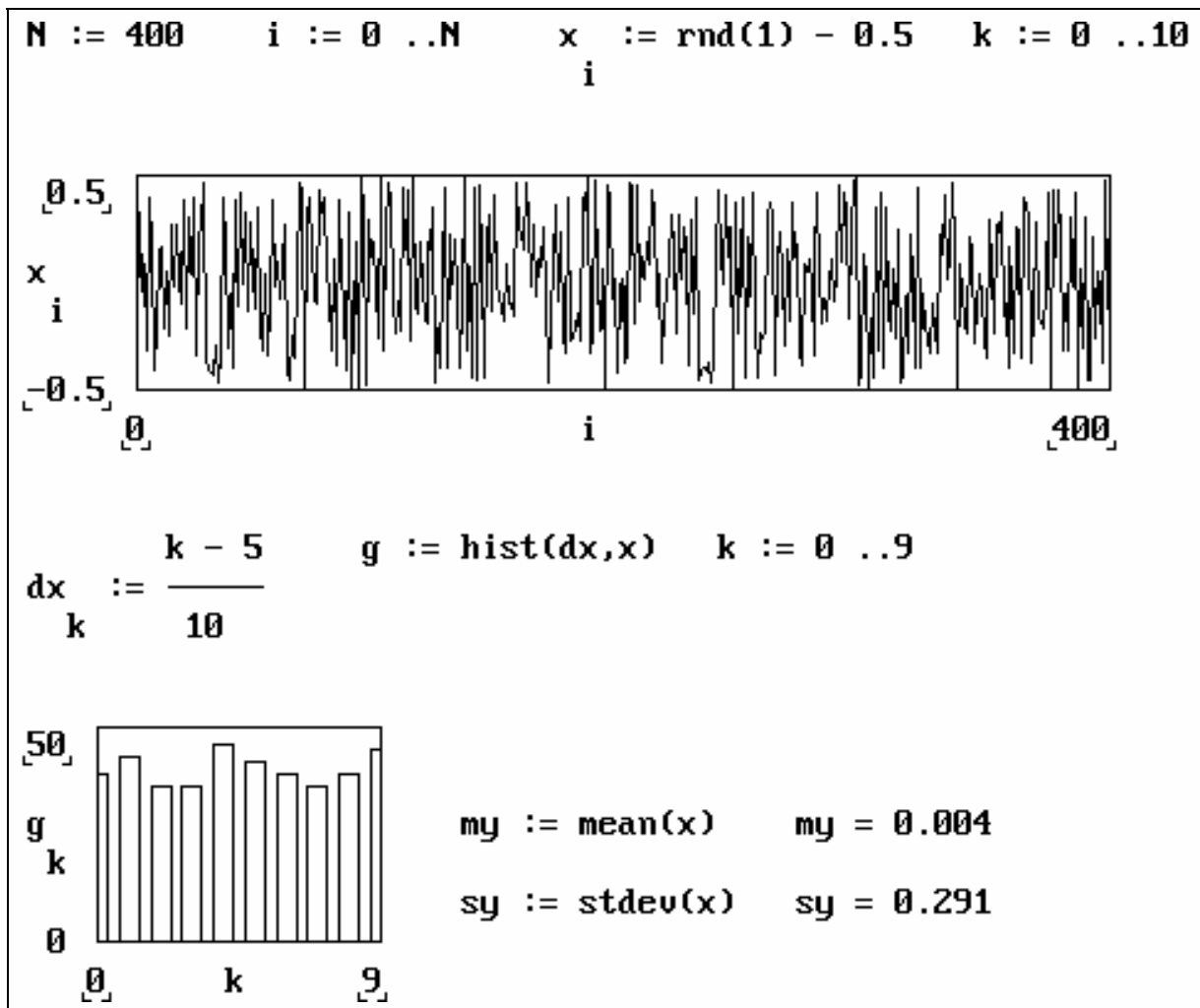


Рис. 3. Документ генерации случайных чисел с равновероятным законом распределения

Поле трехмерного рисунка создают нажатием клавиши ALT-2. Единственное поле данного рисунка заполняется именем матрицы, содержащей данные для графика. Пример построения объемного графика изображен на рис.6

Форматирование графиков осуществляют путем установки

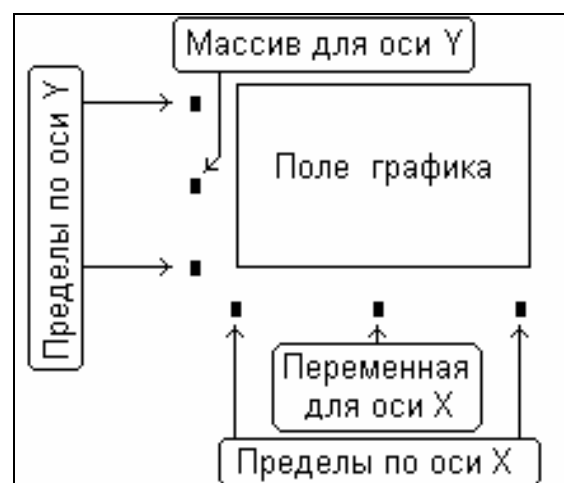


Рис. 4. Макет поля графика

курсора на поле графика и нажатием клавиши F (Format). Меню форматирования позволяет изменять размер поля графика, тип линий, включать и отключать сетку и т.д.

$$i := 1 .. 100$$

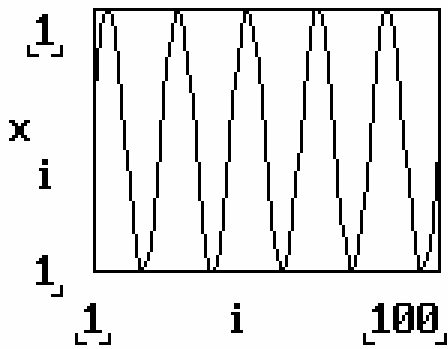
$$x_i := \sin \left[6.28 \cdot \frac{i}{20} \right]$$


Рис.5. Пример построения графика функции $\sin(x)$

Меню системы MathCAD

Вызов системных меню MathCAD осуществляют клавишей F-10. При этом доступны подменю:

- системных операций;
- файловых операций;
- режимов вычислений;
- редактирования и др.

Меню системных операций

(рис.7) позволяет вызвать файл помощи, установить принтер, распечатать документ и т.д. Завершение работы системы и выход в ДОС осуществляют командой меню Quit или комбинацией клавиш Ctrl-Q.

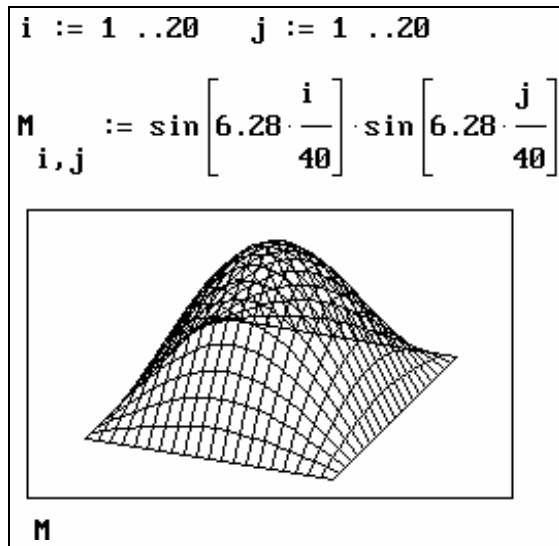


Рис. 6. Пример построения объемного графика

Меню файловых операций (рис. 8) позволяет сохранять текущий документ на диске, загружать документы с диска, изменять имя документа и т.д.

Меню управления вычислениями (рис.9) дает возможность переводить систему либо в режим автоматических вычислений, либо ручных, когда необходимо нажимать клавишу F9 для выполнения

вычислений в документе. Этот режим вычислений полезен при редактировании. Соответствующие операции показаны в меню редактирования (рис. 10). Отметку

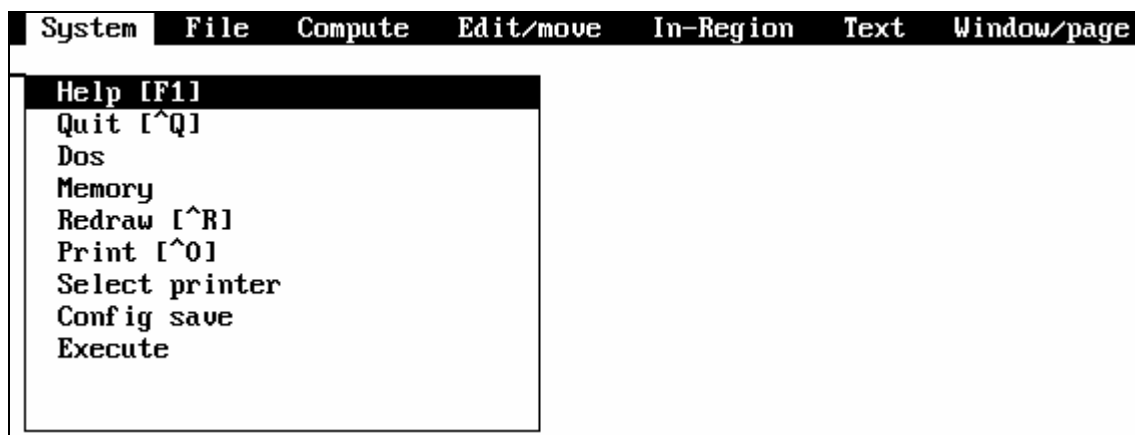


Рис. 7. Меню системных операций

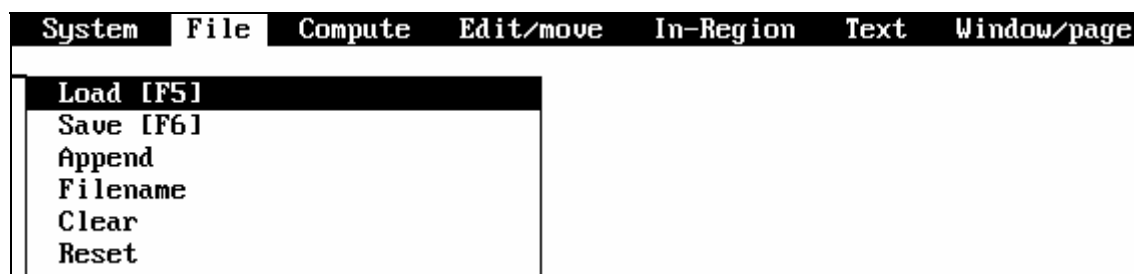


Рис. 8. Меню файловых операций

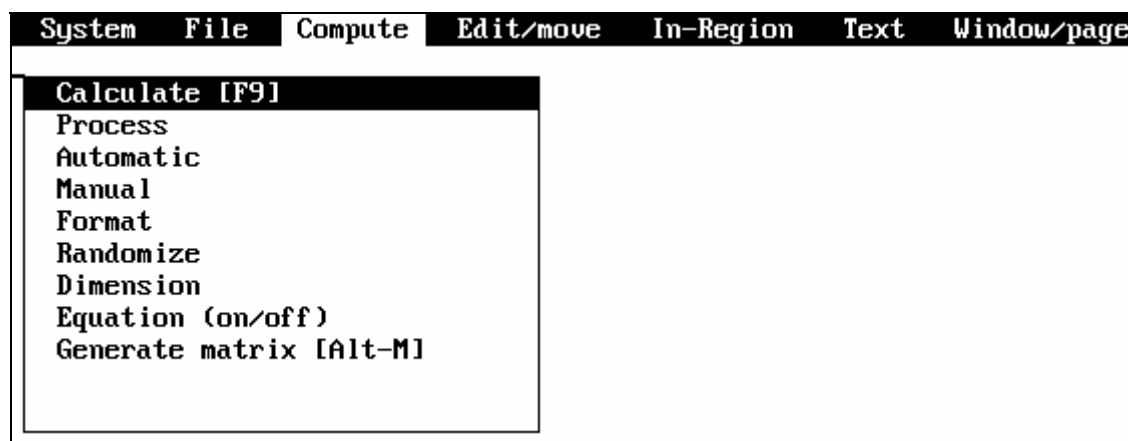


Рис. 9. Меню управления вычислениями

блока в документе осуществляют комбинацией клавиш Ctrl-Y. Для отметки группы операторов необходимо отметить начало группы, затем переместить курсор на конец группы и повторно нажать Ctrl-Y. Третье нажатие Ctrl-Y отменяет отметку. Отмеченный блок документа может быть скопирован в буфер (F2), перемещен в буфер

(F3) либо из буфера на новое место (F4).

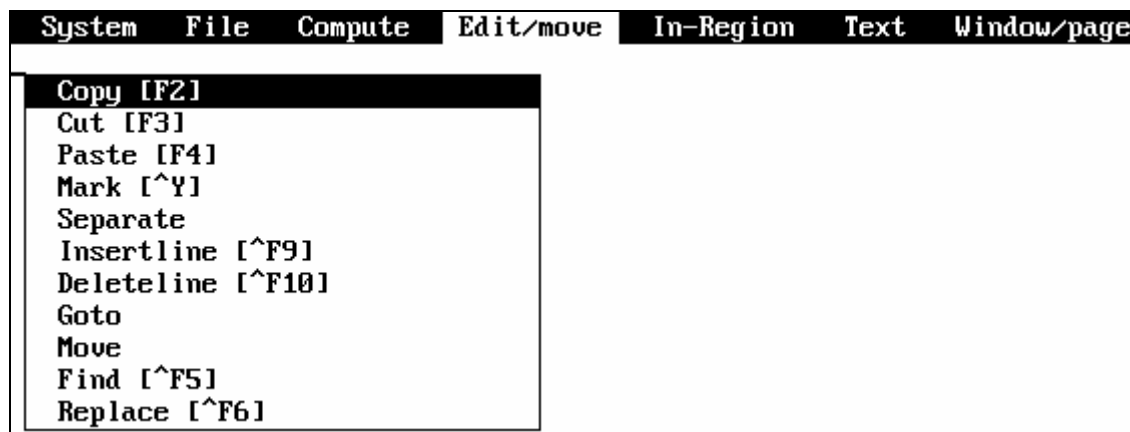


Рис. 10. Меню редактирования

Вставку пустых строк в документ осуществляют нажатием клавиш Ctrl-F9, а их удаление - Ctrl-F10.

Более подробно система MathCAD описана в книге Аладьева В.З., Гершгорна Н.А. Вычислительные задачи на персональном компьютере.- К., Техніка, 1991.- 245 с.

Таблица 3

Краткий справочник по командам MathCAD

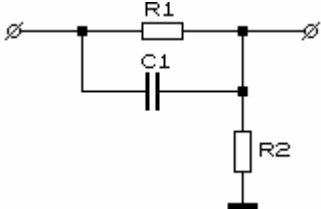
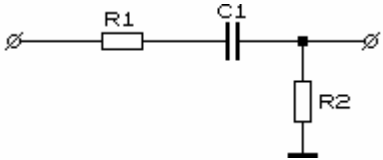
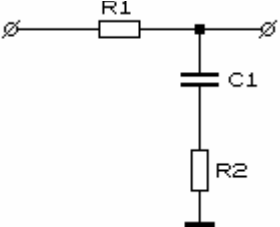
Тип операции	В математике	Ввод с клавиатуры	Изображение на экране
Сложение	$3+5$	$3+5$	$3+5$
Вычитание	$3-5$	$3-5$	$3-5$
Умножение	3×5	$3*5$	$3 \cdot 5$
Деление	$3/5$	$3/5$	$\frac{3}{5}$
Возведение в степень	3.5^{-3}	3.5^{-3}	3.5^{-3}
Квадратный корень	$\sqrt{5}$	$5\sqrt{}$	$\sqrt{5}$

Окончание табл. 3

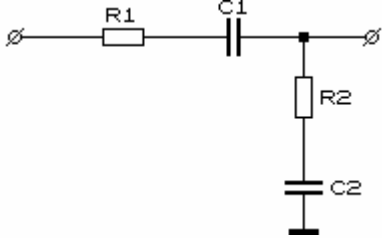
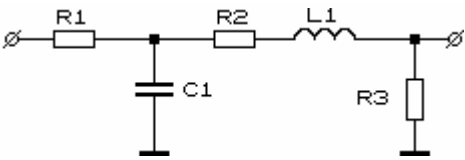
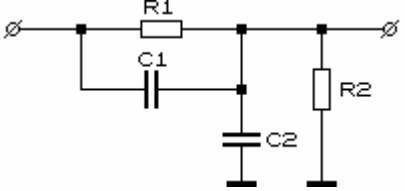
Тип операции	В математике	Ввод с клавиатуры	Изображение на экране
Модуль	$ x $	x	x
Число π	3.14159265...	Alt-P	π
Сумма	$s = \sum_{i=1}^N x_i$	s:i\$х[i	$s := \sum_i x_i$
Произведение	$p = \prod_{i=1}^N x_i$	p:i#x[i	$p := \prod_i x_i$
Определенный интеграл	$y = \int_a^b f(x) dx$	y:&abf(x)x	$y := \int_a^b f(x) dx$
Константа	k=5	К:5	К:=5
Цикл с шагом 1	i=1..N	i:1;5	i:=1..5
Цикл с шагом 2	i=1,3,5,7..N	i:1,3;N	i:=1,3..N
Элемент массива	X_i	X[i	x_i
Сложный индекс	x_{i+1}	x[(i+1)	x_{i+1}
График		@	

Приложение 2

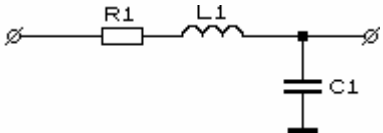
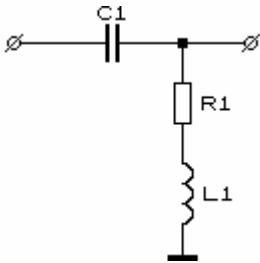
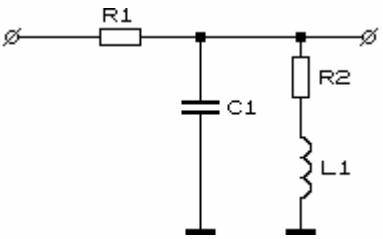
Варианты заданий к лабораторным работам

Номер варианта	Электрическая модель объекта	Передаточная функция объекта	Параметры
1		$K(p) = \frac{p \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 + R_2}{p \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 + R_1 + R_2}$	$R_1 = 10000$ $R_2 = 1000$ $C_1 = 4.7 \cdot 10^{-6}$
2		$K(p) = \frac{p \cdot R_2 \cdot C_1}{p \cdot (R_1 + R_2) \cdot C_1 + 1}$	$R_1 = 10$ $R_2 = 1000$ $C_1 = 10^{-6}$
3		$K(p) = \frac{p \cdot R_2 \cdot C_1 + 1}{p \cdot (R_1 + R_2) \cdot C_1 + 1}$	$R_1 = 10000$ $R_2 = 1000$ $C_1 = 4.7 \cdot 10^{-7}$

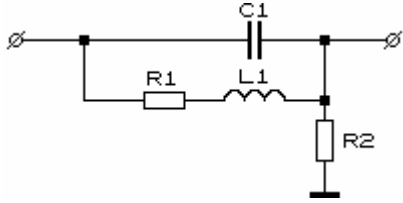
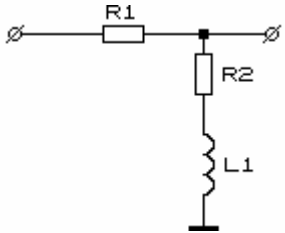
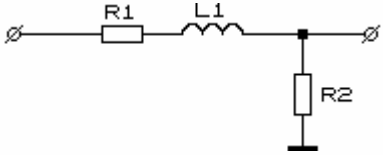
Продолжение прил. 2

Номер варианта	Электрическая модель объекта	Передаточная функция объекта	Параметры
4		$K(p) = \frac{p \cdot R_2 \cdot C_2 + 1}{p \cdot (R_1 + R_2) \cdot C_2 + \frac{C_2}{C_1} + 1}$	$R_1 = 3000$ $R_2 = 10$ $C_1 = 10^{-5}$ $C_2 = 0.68 \cdot 10^{-6}$
5		$K(p) = R_3 / \{ p^2 \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot L_1 + p \cdot [(R_2 + R_3) \cdot R_1 \cdot C_1 + L_1] + R_2 + R_3 \}$	$R_1 = 5100$ $R_2 = 2$ $R_3 = 1000$ $C_1 = 10^{-6}$ $L_1 = 10^{-3}$
6		$K(p) = \{ p \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 + R_2 \} / \{ p \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot (C_1 + C_2) + R_1 + R_2 \}$	$R_1 = 1000$ $R_2 = 100$ $C_1 = 47 \cdot 10^{-6}$ $C_2 = 68 \cdot 10^{-8}$

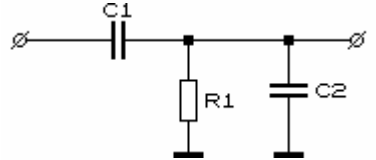
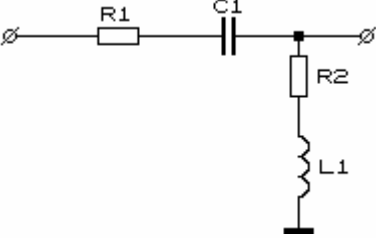
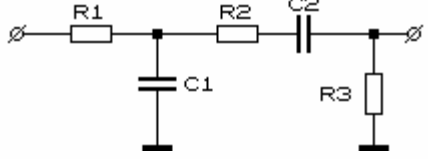
Продолжение прил. 2

Номер варианта	Электрическая модель объекта	Передаточная функция объекта	Параметры
7		$K(p) = \frac{1}{p^2 \cdot C_1 \cdot L_1 + p \cdot R_1 \cdot C_1 + 1}$	$R_1 = 1$ $C_1 = 10^{-4}$ $L_1 = 10^{-2}$
8		$K(p) = \frac{p^2 \cdot C_1 \cdot L_1 + p \cdot R_1 \cdot C_1}{p^2 \cdot C_1 \cdot L_1 + p \cdot R_1 \cdot C_1 + 1}$	$R_1 = 5.1$ $C_1 = 10^{-4}$ $L_1 = 10^{-2}$
9		$K(p) = (p \cdot L_1 + R_2) / \{ p^2 \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot L_1 + p \cdot (R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 + L_1) + R_1 + R_2 \}$	$R_1 = 5.1$ $R_2 = 0.1$ $C_1 = 68 \cdot 10^{-6}$ $L_1 = 10^{-2}$

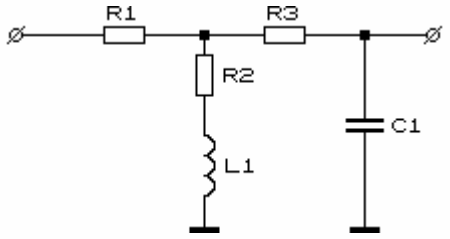
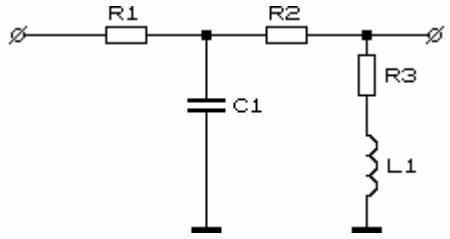
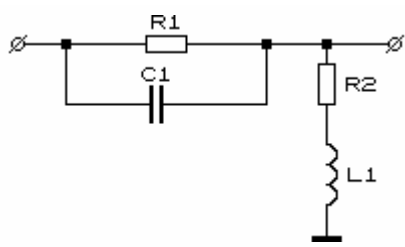
Продолжение прил. 2

Номер варианта	Электрическая модель объекта	Передаточная функция объекта	Параметры
10		$K(p) = \frac{\left\{ p^2 \cdot R_2 \cdot C_1 \cdot L_1 + \right.}{\left. \left\{ p^2 \cdot R_2 \cdot C_1 \cdot L_1 + p \cdot (R_1 \times \right. \right.}$ $\left. \left. \times R_2 \cdot C_1 + L_1) + R_1 + R_2 \right\} \right\}}$	$R_1 = 1$ $R_2 = 18$ $C_1 = 10^{-4}$ $L_1 = 10^{-2}$
11		$K(p) = \frac{p \cdot L_1 + R_2}{p \cdot L_1 + R_1 + R_2}$	$R_1 = 10$ $R_2 = 2$ $L_1 = 5 \cdot 10^{-2}$
12		$K(p) = \frac{R_2}{p \cdot L_1 + R_1 + R_2}$	$R_1 = 1$ $R_2 = 10$ $L_1 = 10^{-2}$

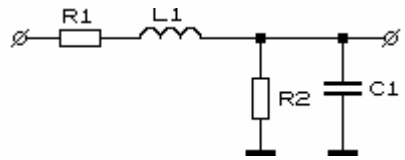
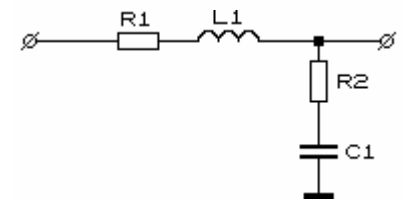
Продолжение прил. 2

Номер варианта	Электрическая модель объекта	Передаточная функция объекта	Параметры
13		$K(p) = \frac{p \cdot R_1 \cdot C_1}{p \cdot R_1 \cdot (C_1 + C_2) + 1}$	$R_1 = 10^3$ $C_1 = 10^{-7}$ $C_2 = 3.3 \cdot 10^{-6}$
14		$K(p) = \frac{\{p^2 \cdot C_1 \cdot L_1 + p \cdot C_1 \cdot R_2\}}{\{p^2 \cdot C_1 \cdot L_1 + p \cdot C_1 \cdot (R_1 + R_2)\}}$	$R_1 = 6.8$ $R_2 = 1$ $C_1 = 10^{-6}$ $L_1 = 10^{-2}$
15		$K(p) = \frac{\{p \cdot R_3 \cdot C_2\}}{\{p^2 \cdot R_1 \cdot C_1 \times C_2 \cdot (R_2 + R_3) + p \cdot [(R_2 + R_3) \times C_2 + R_1 \times C_2] + 1\}}$	$R_1 = 8200$ $R_2 = 1$ $R_3 = 10^3$ $C_1 = 10^{-7}$ $C_2 = 3.3 \cdot 10^{-6}$

Продолжение прил. 2

Номер варианта	Электрическая модель объекта	Передаточная функция объекта	Параметры
16		$K(p) = \{p \cdot L_1 + R_2\} / \{p^2 \cdot R_3 \times \\ \times C_1 \cdot L_1 + p \cdot [(R_1 + R_2) \cdot R_3 \cdot C_1 + \\ + L_1] + R_1 + R_2\}$	$R_1=1$ $R_2=0.1$ $R_3=10^3$ $C_1=10^{-6}$ $L_1=10^{-2}$
17		$K(p) = \{p \cdot L_1 + R_3\} / \{p^2 \cdot R_1 \times \\ \times C_1 \cdot L_1 + p \cdot [(R_2 + R_3) \cdot R_1 \times \\ \times C_1 + L_1] + R_2 + R_3\}$	$R_1=10^4$ $R_2=1$ $R_3=0.1$ $C_1=10^{-7}$ $L_1=10^{-2}$
18		$K(p) = \frac{\left\{ p^2 \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot L_1 + \right. \\ \left. + p \cdot (R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 + L_1) + R_2 \right\}}{\left\{ p^2 \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot L_1 + p \cdot (R_1 \times \right. \\ \left. \times R_2 \cdot C_1 + L_1) + R_1 + R_2 \right\}}$	$R_1=1000$ $R_2=1$ $C_1=47 \cdot 10^{-6}$ $L_1=10^{-2}$

Окончание прил. 2

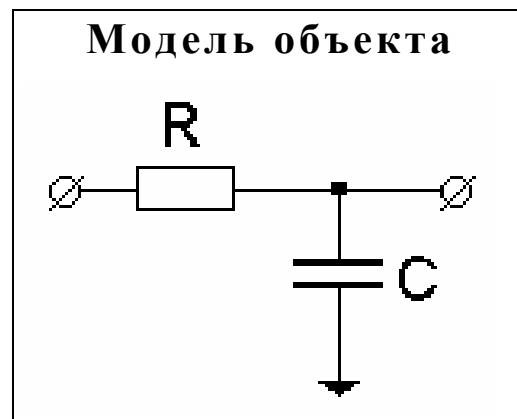
Номер варианта	Электрическая модель объекта	Передаточная функция объекта	Параметры
19		$K(p) = \frac{R_2}{\left\{ p^2 \cdot R_2 \cdot C_1 \cdot L_1 + p \cdot (R_1 \times \right. \\ \left. \times R_2 \cdot C_1 + L_1) + R_1 + R_2 \right\}}$	$R_1=2$ $R_2=10^3$ $C_1=10^{-4}$ $L_1=10^{-2}$
20		$K(p) = \frac{p \cdot R_2 \cdot C_1 + 1}{\left\{ p^2 \cdot C_1 \cdot L_1 + p \cdot (R_1 + \right. \\ \left. + R_2) \cdot C_1 + 1 \right\}}$	$R_1=2$ $R_2=1$ $C_1=10^{-5}$ $L_1=10^{-2}$

Приложение 3

Пример программы моделирования

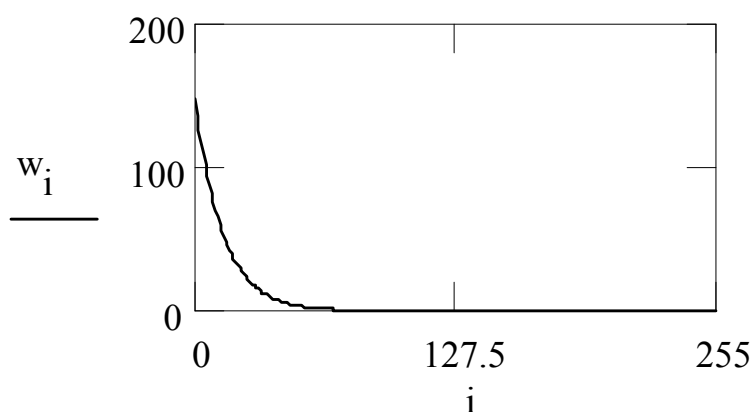
Исходные данные:

$$\begin{aligned}
 c &:= 6.8 \cdot 10^{-7} & r &:= 10000 \\
 a &:= r \cdot c & F &:= 1000 \\
 N &:= 256 & i &:= 0..N - 1 \\
 M &:= \frac{N}{2} & dT &:= \frac{1}{2 \cdot F} & dF &:= \frac{F}{M}
 \end{aligned}$$



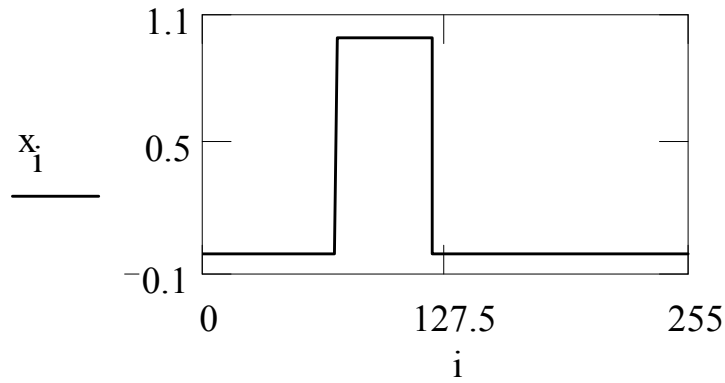
Импульсная переходная характеристика

$$w_i := \frac{1}{a} \cdot \exp\left(-\frac{i \cdot dT}{a}\right)$$



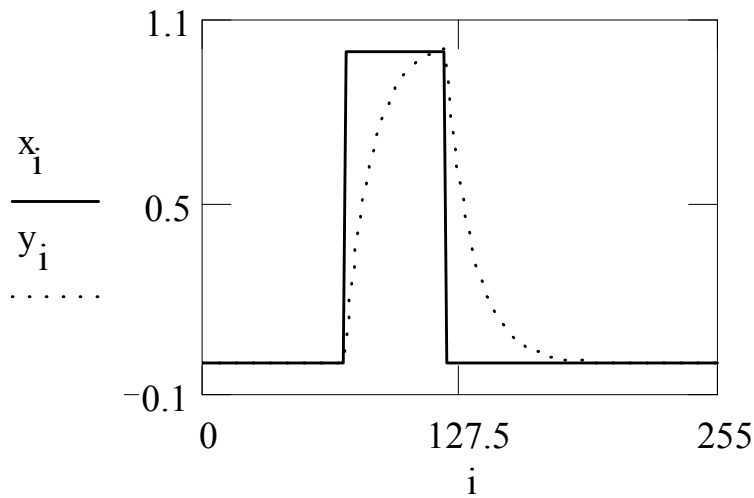
Входное воздействие

$$x_i := \text{if}(i > 70, 1, 0) \quad x_i := \text{if}(i > 120, 0, x_i)$$



Моделирование прямым методом

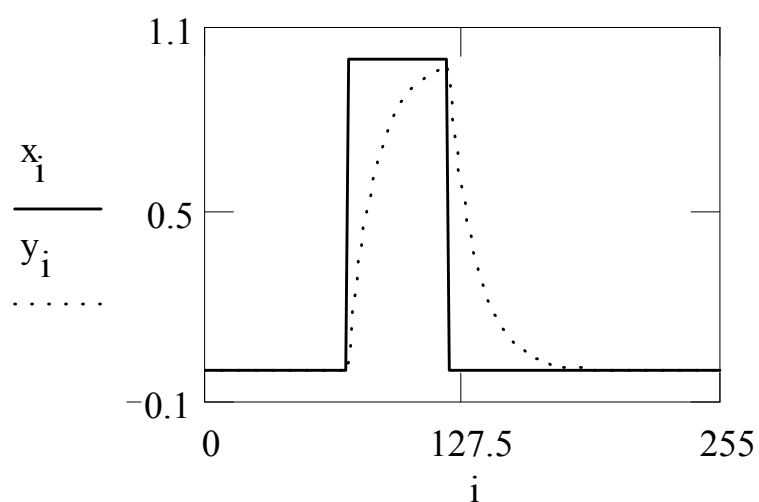
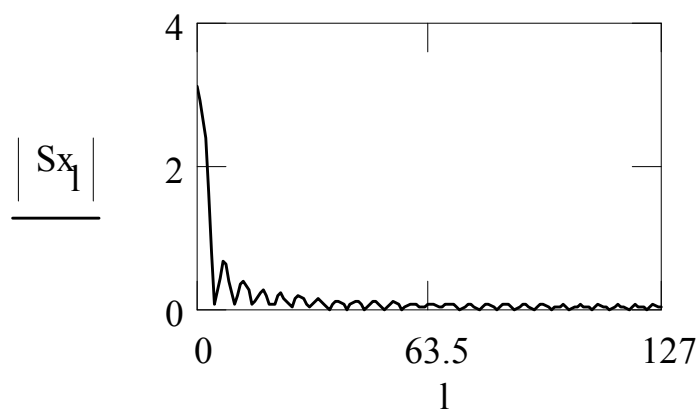
$$j := 0..N - 1 \quad y_i := dT \cdot \sum_j w_j \cdot x_{\text{iff}(i < j, 0, i - j)} \quad y1_i := y_i$$



Моделирование методом преобразования Фурье

$$l := 0..M - 1 \quad Sx := \text{fft}(x) \quad l := 0..M \quad p_l := 2i \cdot \pi \cdot dF \cdot l$$

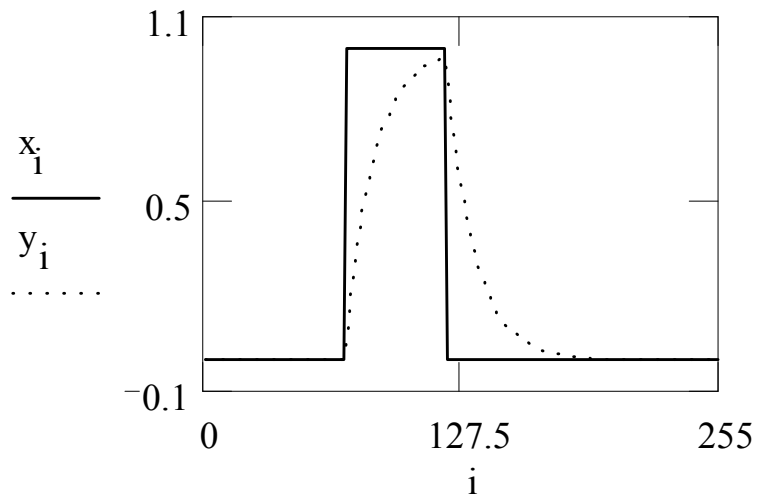
$$W_1 := \frac{1}{a \cdot p_1 + 1} \quad G_1 := \overline{W_1} \cdot Sx_1 \quad y := \text{iff}(G) \quad y2_i := y_i$$



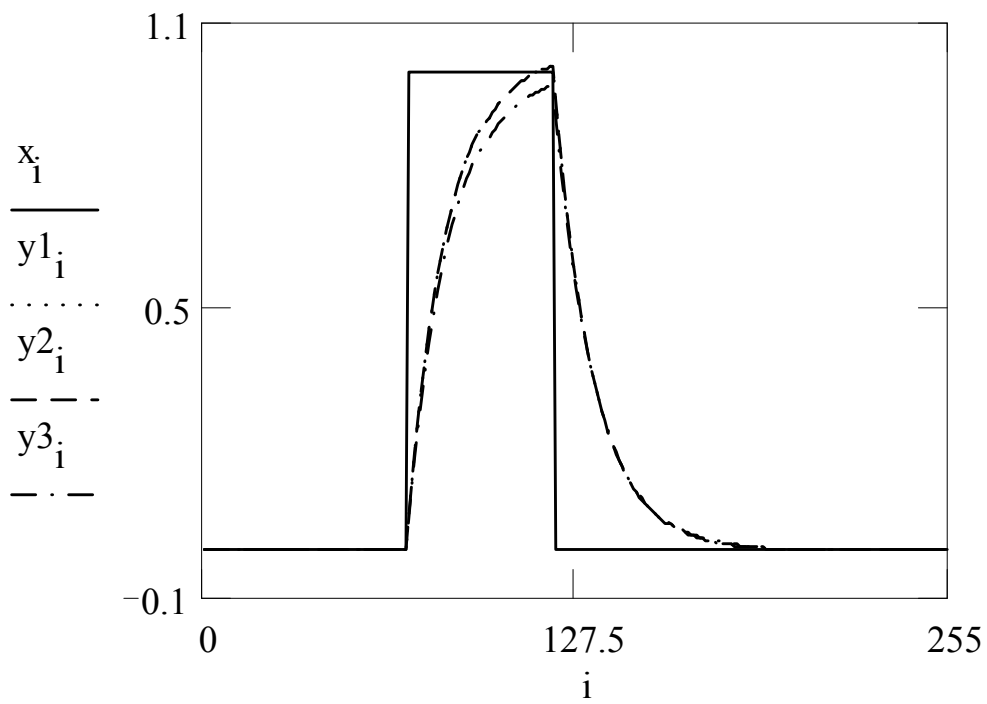
Моделирование рекуррентным методом

$$y_0 := 0 \quad i := 1..N - 1$$

$$y_i := \frac{a \cdot y_{i-1} + dT \cdot x_i}{a + dT} \quad y3_i := y_i$$



Сравнение результатов моделирования



Приложение 4

Пример программы проверки качества встроенного генератора случайных чисел

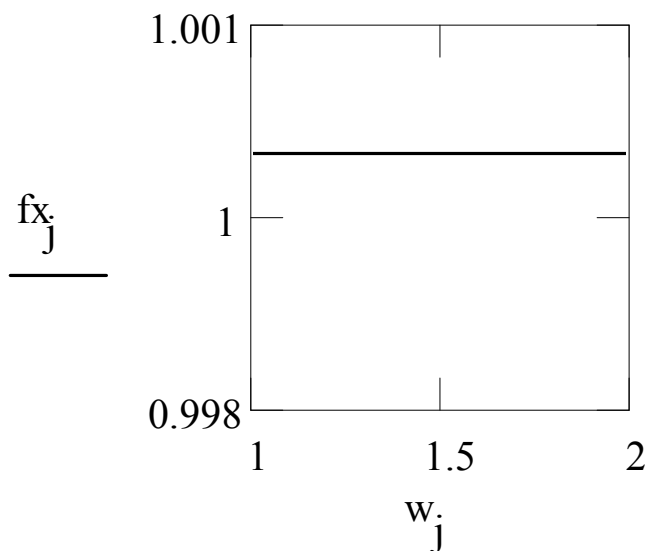
Исходные данные:

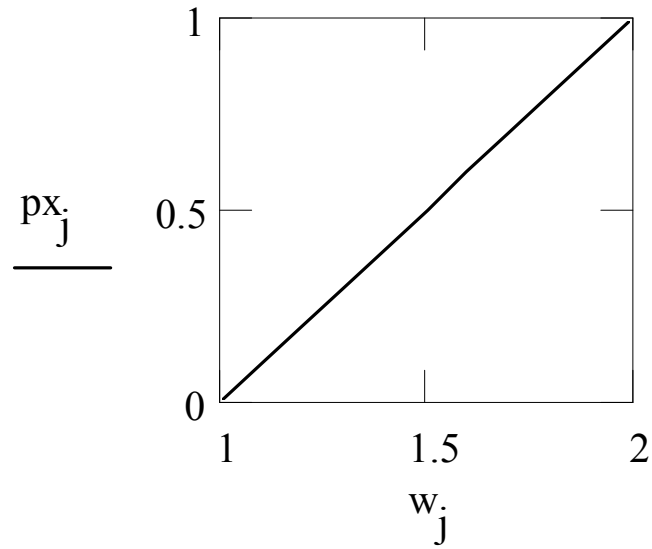
$$N := 200 \quad i := 1..N \quad a := 1 \quad b := 2 \quad M := 10 \quad j := 0..M$$

Теоретический анализ

$$f(z) := \frac{1}{b-a} \quad w_j := (b-a) \cdot \frac{j}{M} + a \quad fx_j := f(w_j)$$

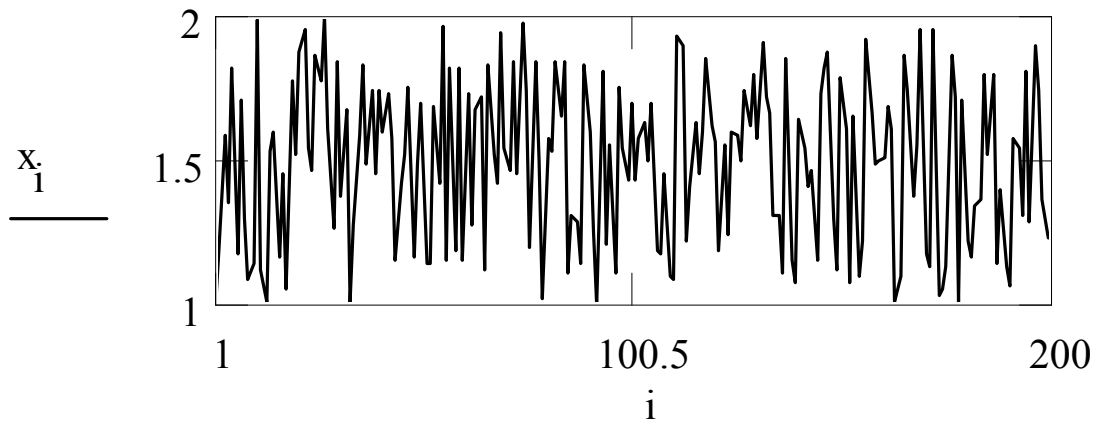
$$F(z) := \int_a^z f(z) dz \quad px_j := F(w_j)$$





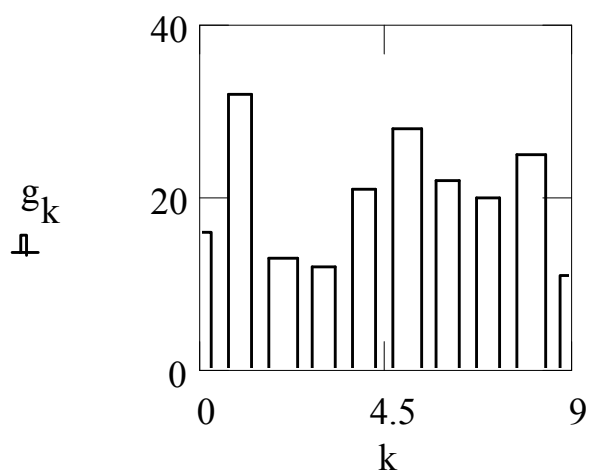
Генерация случайных чисел

$$x_i := \text{rnd}(1) \quad x_i := x_i \cdot (b - a) + a$$



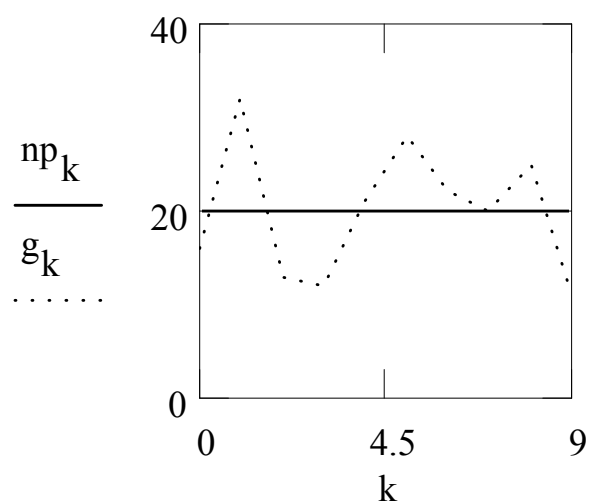
**Анализ соответствия распределения выборки
равномерному распределению по критерию χ^2**

$$g := \text{hist}(w, x) \quad k := 0..M - 1$$



$$p_k := \int_{w_k}^{w_{k+1}} f(z) dz$$

$$np_k := N \cdot p_k$$

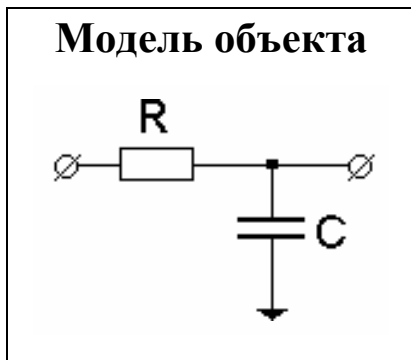


$$xi2 := \sum_k \left[\frac{(np_k - g_k)^2}{np_k} \right]$$

$$xi2 = 22.4 \blacksquare$$

Приложение 5

Пример программы определения ширины поля допуска



Исходные данные

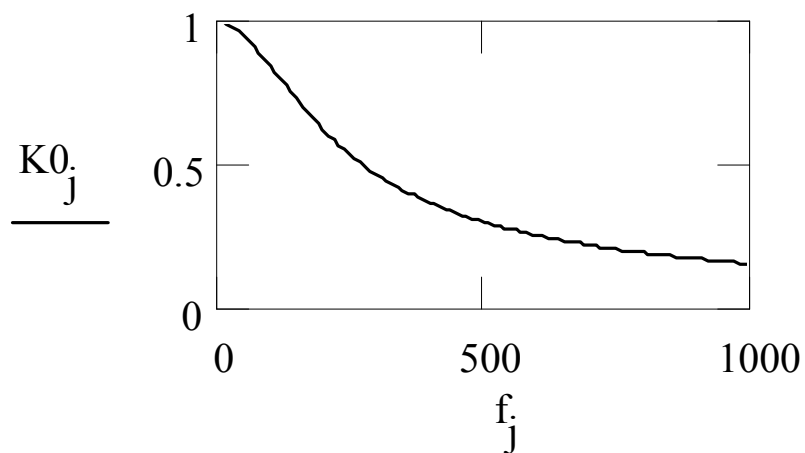
$$C := 1 \cdot 10^{-6} \quad R := 1000 \quad dF := 10.0$$

$$j := 0..100 \quad f_j := j \cdot dF$$

Расчет частотной характеристики

$$K(f, R, C) := \left| \frac{1}{1 + 6.28i \cdot f \cdot R \cdot C} \right|$$

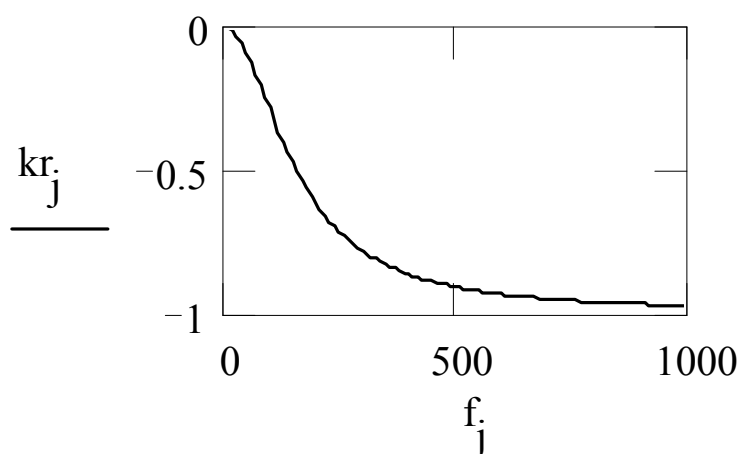
$$K0_j := K(f_j, R, C)$$



Расчет коэффициентов влияния

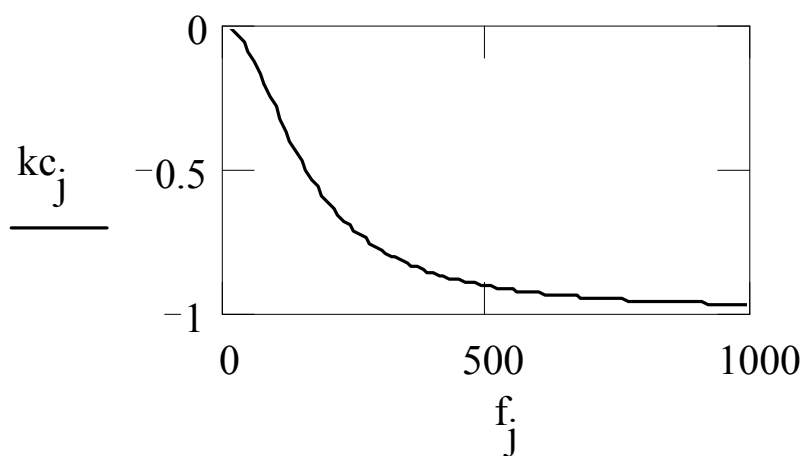
Для резистора

$$dr := 0.01 \cdot R \quad kr_j := \frac{K(f_j, R + dr, C) - K0_j}{dr} \quad kr_j := kr_j \cdot \frac{R}{K0_j}$$



Для конденсатора

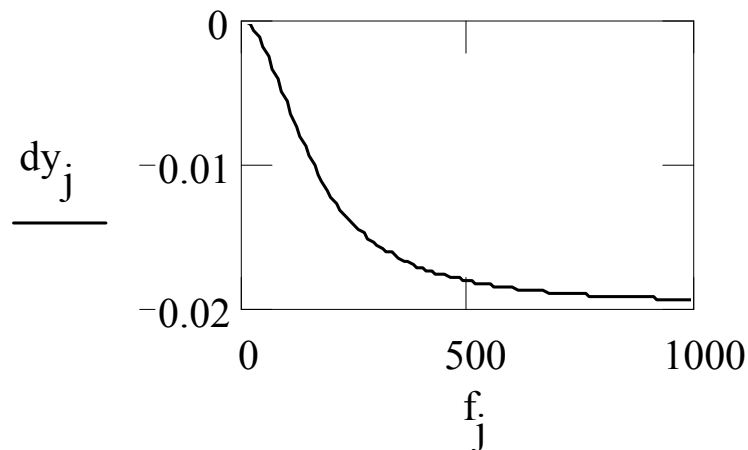
$$dc := 0.01 \cdot C \quad kc_j := \frac{K(f_j, R, C + dc) - K0_j}{dc} \quad kc_j := kc_j \cdot \frac{C}{K0_j}$$



**Зависимость относительной погрешности
выходного параметра от частоты**

$$dy_j := kr_j \cdot \frac{dr}{R} + kc_j \cdot \frac{dc}{C} \quad dy_j := |dy_j|$$

$$\max_dy := \max(dy)$$



Частота максимального отклонения АЧХ:

$$n := \sum_j \text{if}(dy_j = \max_dy, j, 0) \quad n = 100 \quad f_n = 1 \cdot 10^3$$

$$kr_n = -0.966 \quad kc_n = -0.966$$

**Статистическое моделирование
технологического разброса R, C**

Генератор случайных чисел

$$i := 0..200 \quad m := 24 \quad l := 1..m$$

$$\text{NormRnd}(z) := \sqrt{\frac{12}{m}} \cdot \left(\sum_1^m \text{rnd}(1) - \frac{m}{2} \right)$$

Допуск на элементы

$$dr := 0.1 \cdot R,$$

$$dc := 0.1 \cdot C$$

Генерация случайных R, C и расчет АЧХ

$$r_i := \text{NormRnd}(i) \cdot \frac{dr}{3} + R \quad c_i := \text{NormRnd}(i) \cdot \frac{dc}{3} + C$$

$$k_i := K(f_n, r_i, c_i)$$

Анализ результатов моделирования

$$mk := \text{mean}(k) \quad mk = 0.157 \quad ms := \text{stdev}(k) \quad ms = 7.49 \cdot 10^{-3}$$

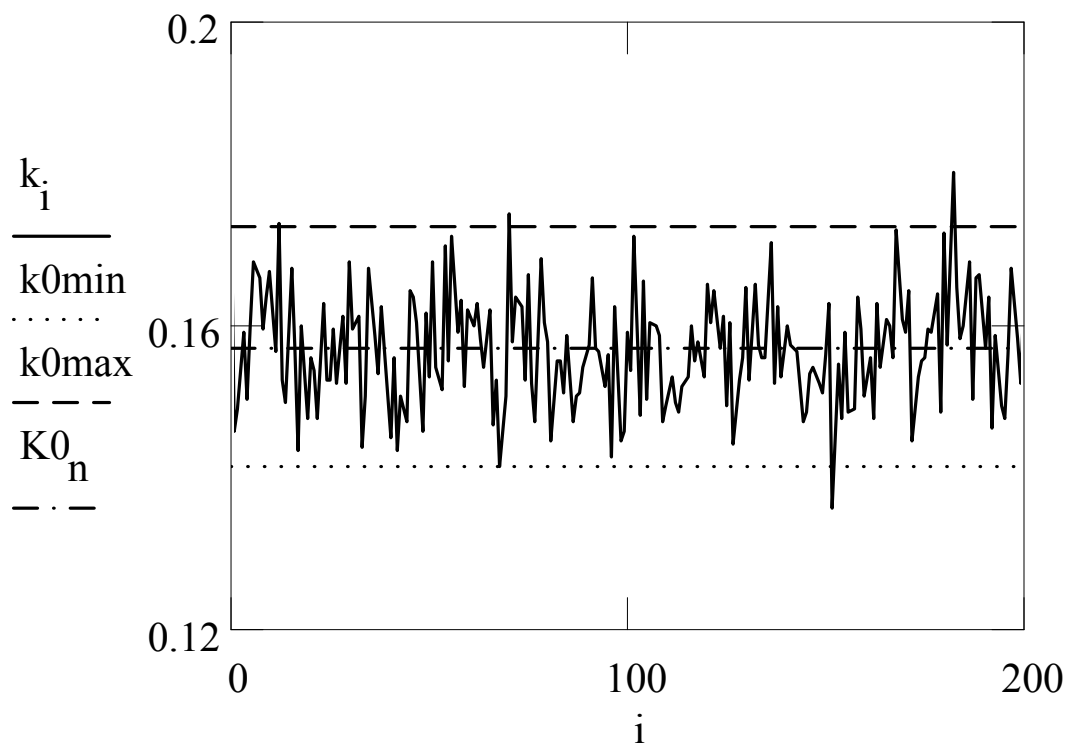
$$K0_n = 0.157 \quad k0min := K0_n - 0.1 \cdot K0_n \quad k0max := K0_n + 0.1 \cdot K0_n$$

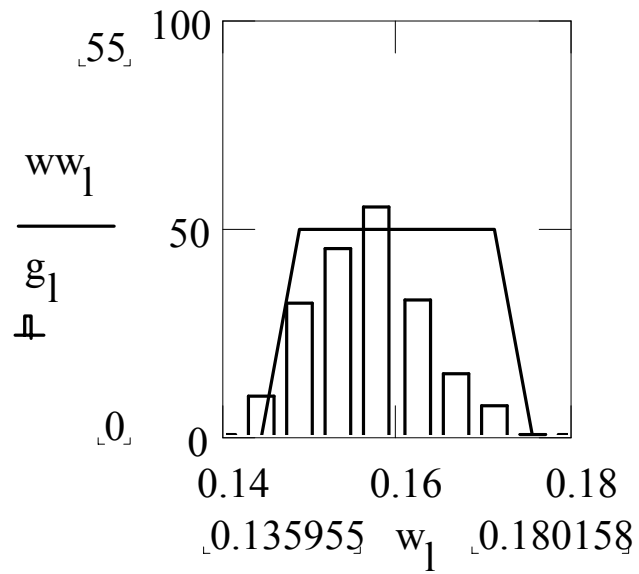
Построение гистограммы выходного параметра

$$mink := \min(k) \quad maxk := \max(k) \quad l1 := 0..10 \quad l := 0..9$$

$$w_{l1} := (maxk - mink) \cdot \frac{l1}{9} + mink \quad g := \text{hist}(w, k)$$

$$ww_1 := \text{if}(w_1 < k0min, 0, 50) \quad ww_1 := \text{if}(w_1 > k0max, 0, ww_1)$$





Расчет вероятности пребывания выходного параметра
в пределах поля допуска

$$N_{\min} := \sum_i \text{if}(k_i < k_{0\min}, 1, 0) \quad N_{\max} := \sum_i \text{if}(k_i > k_{0\max}, 1, 0)$$

$$P := \frac{201 - N_{\min} - N_{\max}}{201}$$

$$P = 0.97$$

Список используемой и рекомендуемой литературы

1. Коновалов Г. Ф. Радиоавтоматика : Учебник для вузов.- М.: Высш. шк. 1990.-335 с.
2. Быков В.В. Цифровое моделирование в статической радиотехнике -М.: Сов. радио, 1971. - 328 с.
3. Тетельбаум И.М., Шнейдер Ю.Р. Практика аналогового моделирования динамических систем: Справочное пособие -М.: Энерго-атомиздат, 1987. -384 с.
4. Кофанов Ю.Н. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности радиоэлектронных средств: Учебник для вузов. -М.: Радио и связь, 1983. -310 с.
5. Фролов В.А. Анализ и оптимизация в прикладных задачах конструирования РЭС: Учебн. пособие -К.: Вища шк. 1981. - 310 с.
6. Яншин А.А. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности ЭВА: Учеб. пособие для вузов -М.: Радио и связь, 1983. -312 с.
7. Львович Я.Е., Фролов В.Н. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности РЭА: Учеб. пособие для вузов. -М.: Радио и связь, 1986. -192 с.

Содержание

Лабораторная работа N1. Принципы построения и работы современного аналогового вычислительного комплекса	3
Лабораторная работа N2. Цифровое моделирование цифровых сигналов и воздействий	22
Лабораторная работа N3. Моделирование и исследование динамических объектов на АВК	29
Лабораторная работа N4. Цифровое моделирование динамических объектов	41
Лабораторная работа N5. Методы цифрового статистического моделирования значений сигналов, воздействий и параметров	52
Лабораторная работа N6. Аналоговое моделирование детерминированных и случайных сигналов и воздействий	67
Лабораторная работа N7. Исследование моделей внезапного и деградационного отказов	74
Лабораторная работа N8. Определение полей допусков на выходные параметры и элементы электронных средств (ЭС) методом статистического моделирования	89
Лабораторная работа N9. Методы цифрового статистического моделирования безотказности сложных объектов	101
Лабораторная работа N10. Методика активного оптимального эксперимента по построению регрессионных моделей объектов	109
Приложение 1. Система автоматизации вычислений MathCAD	124
Приложение 2. Варианты заданий к лабораторным работам	146
Приложение 3. Пример программы моделирования	153
Приложение 4. Пример программы проверки качества встроенного генератора случайных чисел	157
Приложение 5. Пример программы определения ширины поля допуска	160
Список используемой и рекомендуемой литературы	165

Михаил Федорович Бабаков
Анатолий Владиславович Попов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ,
ТЕХНОЛОГИИ И НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРОННЫХ
СРЕДСТВ

Редактор В.М. Коваль

Св. план, 2000

Подписано в печать 08.09.2000

Формат 60×84/16. Бум. офс. № 2. Офс. печ.

Усл. печ. л. 9,2. Уч.-изд. л. 10,8. Т. 150 экз. Заказ 119 Цена свободная

Государственный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского

61070, Харьков – 70, ул. Чкалова, 17

Ротапринт типографии “ХАИ”

61070, Харьков – 70, ул. Чкалова, 17